

## Komplex megközelítés, a közúti hálózati forgalmi folyamatok matematikai modellezésre

Dr. habil. Péter Tamás<sup>1</sup>, Dr. Hány András<sup>2</sup>, Dr. Szauter Ferenc<sup>3</sup>, Dr. Vadvári Tibor<sup>4</sup>, Dr. habil. Lakatos István<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Department of Control for Transportation and Vehicle Systems, Budapest University of Technology and Economics; Stoczek u. 2, H-1111 Budapest, Hungary; [peter.tamas@kjk.bme.hu](mailto:peter.tamas@kjk.bme.hu)

<sup>2</sup> ZalaZONE; Industrial Park Ltd., Dr. Michelberger Pál u. 3., H-8900 Zalaegerszeg, Hungary; [andras.hary@apnb.hu](mailto:andras.hary@apnb.hu)

<sup>3</sup> Széchenyi István University SZE KVJT and JKK; Egyetem tér 1. H-9026 Győr, Hungary; [szauter@sze.hu](mailto:szauter@sze.hu)

<sup>4</sup> University of Pannonia; Gasparich Márk u. 18/A, H-8900 Zalaegerszeg, Hungary; [vadvvari.tibor@zek.uni-pannon.hu](mailto:vadvvari.tibor@zek.uni-pannon.hu)

<sup>5</sup> Széchenyi István University SZE KVJT and JKK; Egyetem tér 1. H-9026, Győr, Hungary; [lakatos@sze.hu](mailto:lakatos@sze.hu)

---

A különböző közlekedési alágazatok járműforgalmi folyamatait összehasonlítva a legbonyolultabb a közúti közlekedésé. A nagyméretű közlekedési hálózatok kutatási téma az elméleti kérdések vizsgálata mellett kiemelt gyakorlati jelentőséggel bír. A tetszőleges méretű közúti közlekedési hálózatok egységes működésének és a hálózati elemeken áramló bonyolult közlekedési folyamatok dinamikájának jobb megértéséhez, speciális matematikai modellt alkalmazunk.

---

### 1. BEVEZETÉS

A nagyméretű közlekedési hálózatok kutatási téma az elméleti kérdések vizsgálata mellett kiemelt gyakorlati jelentőséggel bír. Napjainkban, a gazdasági és társadalmi folyamatok egyre nagyobb kihívásokat támasztanak a közlekedési rendszerekkel szemben. Különösen igaz ez a közúti közlekedési alágazatra, amely a szárazföldi közlekedés meghatározó tényezője. A közúti közlekedés bír a legnagyobb teljesítménnyel a közlekedési módok között, az áru- és személyszállításnál egyaránt 70-75%-ot képvisel az Európai Unióban és Magyarországon is. Ugyanakkor, a gazdasági veszteségeket tekintve, egy igen pazarló alágazat. A közlekedés minősége kiemelkedő szerepet tölt be a különböző társadalmi célok elérésében, Tánzos (2001). Ilyenek pl. a környezetbarát gazdaságos működés és a munkahelyhez, oktatáshoz, egészségügyi ellátáshoz, a pihenési és rekreációs lehetőségekhez való hozzáférések. Az említett társadalmi célok elérésnek egyik fontos eleme a közúti forgalomirányítás hatékonyságának javítása, Kövesné (2003.1). A folyamatok megértésében és a szabályozási problémák megoldásában segít a különböző diszciplínák által kidolgozott elméleti eredmények integrálása. Ennek érdekében a közúti közlekedés korszerű tervezéséhez és korszerű szabályozásához elengedhetetlen a közlekedési folyamatok mélyebb ismerete.

### 2. KÖZÚTI HÁLÓZATOK MAKROSKOPIKUS MODELLEZÉSE

A közúti hálózatok makroszkopikus modellezésére az LWR alapmodell alkalmazása terjedt el a közlekedés állapotfejlődésének leírására, Michael James Lighthill és Gerald B. Whitham (1955), továbbá Paul I. Richards (1956) kutatásai alapján. Az LWR parciális differenciálegyenlet

(LWR PDE) az Euler-féle kontinuitási egyenlet alkalmazása, amely cellánként (útszektoronként) veszi figyelembe a sebesség-sűrűség törvényt. (A közúti hálózatok esetében ezen kívül természetesen még számos speciális szezonálitási, környezeti, forgalomszervezési és humán tulajdonság jelenléte miatt is jelentős eltérések lépnek fel a folyadék-hálózatok működéséhez képest.) Az LWR fontos alkalmazási területe a torlódások kialakulásával kapcsolatos hullámok hátrafelé való terjedésének problémája. A parciális differenciálegyenletek analitikus és numerikus megoldásainál figyelembe kell venni a cellahatár-felületek találkozásainál az eltérő kezdeti értékek következtében fellépő Riemann-féle problémát is, ahol a kezdeti állapotok lökéshullámot, vagy ritka hullámot is előidézhetnek a hálózaton Bretti, Natalini, Piccoli (2007), Herty (2014). Az alkalmazott irányítási stratégiáknál gyakori megoldás a forgalmi dugó eltüntetése érdekében a belépési folyamat korlátozása Bretti, Natalini, Piccoli (2007), Haut, Bastin and Chitour (2005). Széles kutatási terület az optimalizációs stratégiák kialakításánál a visszacsatolásos rámpa-adagolás szabályozás az autópálya és a kapcsolódó hálózatok irányításánál. Bastin, Haut, Coron, d'Andréa-Novel (2007) az LWR modellnél kvadratikus Lyapunov-függvényt alkalmaznak. Az a céljuk, hogy a hálózat stabilitását biztosítsák, megakadályozva a forgalmi dugók megjelenését, az esetleges ideiglenes várakozási sorok megjelenése árán is. Speciális adaptív iteratív irányítást tárgyalnak Tar et al., (2012). Muralidharan and Horowitz (2012) által képviselt megközelítés a rámpaadagolás és a változtatható elosztás szabályozásának kombinációjával keresi a megoldást. Ramezani, Haddad, and Geroliminis (2012) nagyméretű hálózati forgalomvezérlési modellje egy autópálya szakaszból és a városi hálózatból áll. Négy pontot kezelnek a városi régiók és az autópálya közötti áramlásnál, kettőt a két régió között, az átmeneti sebességek befolyásolására. Két vezérlő pedig a rámpáknál a forgalomirányítás problémáját visszahúzással

oldja meg annak érdekében, hogy adott időtartamban maximalizálják a célállomásokat elérők számát. Az irányításelmélet területén az 1980-as és 1990-es években terjedtek el a modell-alapú optimálási irányítási (MPC) stratégiák az egyszerűbb közlekedési modelleknél, amelyeket széles körben használnak számos városban: Lowrie (1982), Gartner (1983), Farges, Henry and Tufal (1983), Robertson and Bretherton (1991), Boillot, Blosseville, Lesort, Motyka, Papageorgiou, and S. Sellam (1992), Bielefeldt and Busch (1994), Sen and Head (1997), Bretherton, Bodger, Baber, and Controls (2004), Varga and Bokor (2007). Az MPC módszerek nagyon vonzóak, azonban a valós városi hálózatoknál egy modell-alapú irányítási stratégia megvalósításánál ma is a legnagyobb kihívás az online számítások komplexitása. A nagy online számítástechnikai követelmény szinte megvalósíthatatlanná teszi a valós idejű irányíthatóságot a valóságban, Lin, De Schutter, Xi, and Hellendoorn (2011). Az általuk alkalmazott predikciós modell nemlinearitása miatt az optimalizálás nemlineáris nem konvex probléma. Mivel az online számítás komplexitása nagy kihívás az MPC irányításnál, ezért kevert Integer Lineáris Programozási módszert alkalmaztak a városi közlekedési hálózatok irányítási stratégiájához. A szimulációs kísérletek szerint ez egy sikeres módszer lehet az MPC komplexitásának csökkentésére.

Alapvető hozzájárulást adtak az LWR modellezés hatékonyságának növeléséhez C. F. **Daganzo** (1994, 1995) munkái, amelyek a forgalom komplex hálózatokon keresztül történő kialakulását homogén sűrűségű cellák alkalmazásával tárgyalták. Kifejti, hogy az eljárás tetszőleges hosszúságú cellákat is alkalmazhat, bár az LWR eredményekhez közelebb álló közelítés érhető el a rövid, például 100 m cellahosszúsággal. A rendszer állapotát az egyes cellákban jelenlévő  $n_i(t)$  járművek számával lehet megadni és minden cellához adott, maximális  $N_i$  járműszám tartozik. A leírás autópálya modelleknél jól alkalmazható, viszont szerző megállapítja, hogy általános gráfokon így már nem lehet sorszámozni a cellákat, meg kell adni, hogy az eredeti gráf melyik ívén hányadik cellát tekintjük. Szerzőnél problémát okozott a hagyományos közlekedési hálózati gráf megtartása, amely általános esetben a celláknál, egy „kettős” számozást eredményezett.

Ezt a klasszikus makroszkopikus modellezési technikát fejlesztette tovább Markos **Papageorgiou** autópályák és környékük valós idejű modellezésére, forgalom-beclést és irányítást is megvalósítva, pl. Cremer and Papageorgiou (1981), Wang, Papageorgiou et al., (2009). A modelleknél általában  $\Delta_i=500$  m szegmenshosszakkal dolgoznak és a szegmenseknél a diszkrét  $k$  időpontokban két egyenletet alkalmaznak. Az első a  $\rho$  járműsűrűséget írja fel  $k+1$  időpontban, a második a  $v$  járműsebesség becslését adja meg a  $k+1$  időpontban. Ez utóbbi a  $k$  időpontban mért  $v(k)$  sebesség és a  $\rho$  járműsűrűség által a szegmensre már korábban regresszió analízissel meghatározott  $V(\rho)$  sebesség-sűrűség függvény eltérési hibájának minimalizálására épül. Mérésekkel igazolt, igen jól alkalmazható modellt nyertek.

Légi forgalom áramlásirányítás területén, Arneson and Langbort (2009), a hálózatot szektorokra bontva, lineáris pozitív konzervatív rendszert alkalmazott a hálózatokon

keresztül történő anyagáramlás leírására. Az irányítástervezésre a statikus útvonal paramétereiket használják a késések minimalizálására. A szektorok közötti kapcsolatokat feltételekkel irták fel és gráffal adták meg. A  $0 \leq x_i(t)$  állapotjellemzők, az  $i$ -edik szektorban tartózkodó légi járművek számát jelentik. A hálózaton állandó  $v$  sebességgel és  $\beta_{ij}$  szétosztási tényezőkkel áramlik az „anyag”.

### 3. MEGJEGYZÉSEK A HAGYOMÁNYOS KÖZÚTI HÁLÓZATI MODELLEZÉSEL KAPCSOLATBAN

1. *Minden részhálózat más.* A hagyományos modellek a közlekedési hálózatot csomópontok és szakaszok halmazának és ezen elemek kapcsolatainak tekintik, amelyeken keresztül áramlanak a járművek. Ez olyan irányított gráf, amely leutánozza a térképet. A gráf csúcsai a csomópontok, illetve kereszteződések, az ívek pedig az őket összekötő útszakaszok. Megállapítható, hogy a hagyományos modellek térkép-alapúak. A modell a térkép-gráftól függ, ezért minden más tartományon a hálózati modellt újra fel kell építeni, mindig figyelembe véve az ott érvényes forgalomszervezési megoldásokat is. A modellezés részgráfokat vizsgál, ezért bármelyik részhálózat modellezése mindig csak egy példa a nagy hálózatban és önmagában nem vezet el a teljes hálózat általános működésének leírásához. (A nagyméretű modellek, mint például a Papageorgiou és munkatársai által megadott autópálya modellek szintén csak kis részek az egészből.) Nyitva hagynak olyan kérdést pl., hogy ha megoldjuk egy résztartományon a forgalom optimalizálását, van-e arra garancia, hogy nem toltuk-e ki a problémát a nem tárgyalt tartományra. A közlekedési hálózatok vizsgálatánál tehát, természetes módon merül fel a rész és az egész kapcsolatának kérdéséhez, amely sok területen foglalkoztatja a kutatókat és gondolkodókat. Ez mindmáig és minden területen, a vallások, a filozófia, a természettudományok területén és az irodalomban is az izgalmas kérdések középpontjában áll. Ezzel kapcsolatban **Blaise Pascal** (1623-1662) így fogalmazott: *Lehetetlen ismerni a részeket az egész ismerete nélkül, sem az egészet a részek ismerete nélkül. /Je tiens impossible de connaître les parties, sans connaître le tout, non plus que de connaître le tout sans connaître les parties. „Les Pensées de Blaise Pascal”/* **A közúti hálózati modellezési technika tehát mindaddig csupán példákat eredményez, amíg a létrehozott modell maga is térkép-gráf szerkezetű.**

2. *A hagyományos hálózati gráf modellek részletezése további ellentmondásokat tár fel:* Az előző pontban tárgyaltak alapján, a közúti hálózat klasszikus megközelítés szerint olyan gráf, amelynek csúcsai a csomópontok és kereszteződések, irányított élei pedig az utak, amelyeken a járműáramlás történik. Ekkor, ez a modell tovább finomítható a párhuzamos sávok figyelembe vételével és ebben az esetben több irányított él is összekötheti a csúcsokat. Az ellentmondás akkor lép fel ebben a modellben, ha pl. egy sáv megszűnése esetén a sávot reprezentáló él nem jut el a csúcsba, hanem egy másik élbe csatlakozik be és ott is végződik, holott az nem csúcs. Hasonló anomália lép fel a párhuzamos sávok működése esetén is, az egymásra történő átáramlások miatt. Ebben az esetben az őket reprezentáló élek között is kell lenni éleknek, amelyek az

átáramlást reprezentálják, viszont ezek az élek szintén nem kezdődnek és nem is végződnek csúcsokban.

3. *Hagyományos modellezés problémája a peremeken a „kapuk” alkalmazása.* A kapuknál Jármű/h forgalmat generálnak, meghatározott statisztika alapján. A modell tehát a kapuk által „érintkezik dinamikusan” a külső hálózattal.

Ez két problémát vet fel. **Alapprobléma**, hogy ezzel a megközelítéssel nem lehet eljutni a globális hálózati modellhez, mert ez a szemléletmód és módszer mindenkor egy zárt tartományt tételez fel, amely mindig is igényelni fogja a kapukat. **Lényeges probléma**, hogy ennek következtében megszakad az a finom struktúra, amely a teljes hálózat elemei között fennáll. A valóságban u.i., a belső hálózati dinamika és a külső hálózati dinamika kölcsönösen hat egymásra és nem veszt tudomást arról a zárt görbéről, amellyel önkényesen elkülönítették őket, mivel az egész egyetlen hálózat és amelyeknél, minden „belső” vagy „külső” szabályozás kihat a másik dinamikájára is. Ezt nem veszik figyelembe a fenti módon a kapuknál generált input-output folyamatok. (Itt szigorú értelemben matematikai modellezést elemzünk és pl. nem a valósidejű méréseket is felhasználó MPC alapú komplex megoldásokat.)

4. *A parkolók szintén gondot okoznak a hagyományos modelleknél.* „Idegen elemek” a hálózati dinamikában. Ezek a hagyományos modellekben más típusú szereplők, mint az útszakaszok a közúti hálózatban. Lényegüket tekintve „belső kapuk”: források és nyelők a hagyományos szemléletű makroszkopikus modelleknél.

A puffer szerepük miatt tehát a hagyományos szemlélet szerint elkülönülnek a dinamikus forgalmi folyamatoktól. Igaz ugyan, hogy a rajtuk folyó belső áramlások közvetlenül nem gyakorolnak látványos hatást a hálózaton működő dinamikus folyamatokra, azonban a parkolóknak a hálózatra gyakorolt dinamikus hatása igen jelentős. Az egzakt matematikai modellben különösen fontos a működésük figyelembe vétele és ennek pontos leírása, amely a további vizsgálatban megoldandó kérdésként kezelendő és bemutatjuk, hogy ők ugyanolyan dinamikus elemei a hálózatnak, mint a szektorok és a hálózat működésénél meghatározó a szektorokhoz fűződő kapcsolati függvényeik szerepe.

5. Valóban szemléletes, de *nem pontos a járműsűrűség definíciója, amelyre a hagyományos modellek támaszkodnak*, amikor a járműsűrűséget az egységnyi útszakaszon az adott időpillanatban található járművek számával [Jármű/km] jellemzik. Ez a definíció nyilvánvalóan pontatlan, mert nem tesz különbséget abban, hogy a „jármű” autóbusz, személygépkocsi, motorkerékpár stb., és ez jelentős eltéréseket okozhat a vizsgálatánál. Matematikai modellezés szempontjából pontosabbnak tűnik az egységjármű fogalom használata [Ejármű/km], azonban ez sem egzakt fogalom, ez statisztikai jelzőszám. Az **egységjármű** bevezetése a keresztmetszeti, ill. csomóponti forgalom praktikus és szemléletes leírására szolgál, felhasználása a hálózati szektorok modellezésénél azonban több hibaforrást hordoz magában. A hiba egyik forrása, hogy minden járműkategórián belül számos eltérő járműtípus fordulhat elő, valamilyen mértékig eltérő hosszúságokkal. Így már az egyes kategóriánál

sem egzakt az egységjármű hosszának meghatározása. A forgalmi viszonyoktól, az egy keresztmetszeten átáramló járműkategóriák eloszlásától és az abban résztvevő járművek dinamikai tulajdonságaitól is függ az egységjármű számok meghatározása, Kollár A (2015). Országonként, földrészenként jelentős különbségek vannak a forgalomban résztvevő járműkategóriák gyakorisága és a jellemző személygépkocsi hosszak között is, Charles Anum Adams et al., (2014), Partha SAHA et al., (2009). Ez alapján a várható egységjármű-hossz forgalomtól és országoktól is függ. Tehát, a szektorok modellezésénél az adott időpontban az a szám, hogy egy szakaszokon hány egységjármű közlekedik, a környezeti és forgalmi viszonyok következtében statisztikai pontatlanságot hordoz magában. A továbbiakban a matematikai modell elkészítésénél, ha van arra mód, hogy pontosabb, vagy pontos számításokat alkalmazhatunk a járműsűrűségek meghatározására, akkor ezt meg kell tennünk.

6. *Az elterjedt szimulációs szoftverek alkalmazásával nem lehet egzakt válaszokat kapni matematikai modellezési kérdésekre.* Ha szoftveresen algoritmizált modelleket alkalmazunk, ezek **nem alkalmasak arra, hogy egzakt matematikai következtetéseket, illetve eredmények adjanak.** Ugyanakkor a viszonylag kisméretű modellek is támaszthatnak rendkívüli számításigényt, pl. parciális differenciál-egyenletrendszerrel dolgozó egyes makroszkopikus modellek.

7. *Nem állandó az anyagáram a nagyméretű hálózaton.* A horizontális (közlekedési) folyamat mellett vertikális folyamat is zajlik a hálózaton, ennek következtében a belső anyagáram összes volumene is folyamatosan változik. A globális hálózaton folyamatosan új járműáram lép be – elvben bármely ponton – és folyamatos az amortizált járművek kiáramlása is a rendszerből, ugyancsak bármely ponton. Gyártás és amortizáció egyszerre történik, tehát a **globális hálózat vizsgálata esetében** megkerülhetetlen és fontos kérdés, hogy az **anyagáram sem állandó.**

#### 4. A MODELLEZÉS MÓDSZERTANA ÉS NÉHÁNY ALKALMAZOTT FOGALOM

A különböző közlekedési alágazatok járműforgalmi folyamatait összehasonlítva a legbonyolultabb a közúti közlekedés. A nagyméretű közúti közlekedési hálózatok egységes működésének és a hálózati elemeken áramló bonyolult közlekedési folyamatok dinamikájának jobb megértéséhez speciális matematikai modellt alkalmazunk.

**A vizsgálatoknál az alábbi nyolc pontba foglalt, új modellezési módszertant alkalmaztuk.**

M<sub>1</sub>. *A járműsűrűség definiálására a szektorok térbeli lefedettségén alapuló, matematikailag egzakt fogalmat használ a modell, amely dimenzió nélküli szám. Bármilyen hosszúságú szektor esetében az értéke a [0,1] intervallumban helyezkedik el és ez a definíció kiterjeszhető bármilyen alakú parkolóra is.* A térbeli lefedettség járműhossz-kapacitás alapú, általánosított szektorhosszra vonatkozik, amely hossz a



közlekedési forgalmi rend sajátosságait is figyelembe veszi a sávsektoroknál és a parkolóknál. Mivel a parkolók ugyanolyan állapotjellemzővel és ugyanolyan anyagátadás kooperációval bíró dinamikus elemek, mint a hagyományos forgalmi szektorok, fontos következmény, hogy a rendkívül bonyolult, nagyméretű közúti hálózatok egységes járműforgalmi modellje egyetlen általános szektorelem típus sokaságából épül fel.

*M<sub>2</sub>. A közúti járműforgalmi folyamatok egységes dinamikus modelljét egy pulzáló irányított gráf határozza meg. A szektorelemek (hálózati alapelemek) – röviden szektorok – azonos típusú állapotjellemzővel és azonos átadási kooperációs képességgel rendelkező szereplők a közúti hálózat egy beosztásánál. Az úthálózaton kialakuló közlekedési folyamat a szektorok sokasága között fellépő dinamikus kooperáció eredménye. Ebben a főszereplők a kooperáló szektorok, amelyek az új gráf csúcsai. Ezek a csúcsok egyúttal állapotjellemzőkkel – dinamikus járműsűrűségekkel – rendelkeznek. A csúcsok közötti élek a fluxusok, a forgalmi áramlások szintén dinamikusak. A kooperációban egyszerre szabályozott az anyagátadás (járműátadás) mennyisége és a sebessége is. A disztribúció és az anyagáram-sebessége egyaránt függ a kooperáló csúcsok állapotjellemzőitől, az őket körülvevő (segítő/akadályozó) környezettől, valamint az időponttól is.*

*M<sub>3</sub>. A hálózati modell egymáshoz csatlakozó szektorainak vizsgálatánál (amely szakaszokat, vagy görbe darabokat a kiválasztásukat követően bázis szektoroknak nevezzük) fontos a köztük fellépő átadási sebességek definíciója. Ezzel kapcsolatban a trajektóriákra mondható ki egy általánosabb elv. Az egyes kijelölt bázis szektorokon a mérések alapján meghatározott bázis sebesség-sűrűség törvényeknek érvényesnek kell maradniuk az ott jelen lévő környezeti paraméterek és adott időpont figyelembevételével, viszont minden egymáshoz csatlakozó kettő vagy több szektor esetében is összefüggő, összetartozó, koherens egységet kell alkotniuk a sebesség-sűrűség törvényeknek.*

*M<sub>4</sub>. A vizsgált tartományban elhelyezkedő valós közlekedési hálózati rendszert virtuális zárt görbével határoljuk körül. (A vizsgált tartomány nem feltétlenül egyszeresen összefüggő). A virtuális zárt görbe megnevezés a modellezés igen fontos tulajdonságát emeli ki. Ily módon, a körülhatárolás következtében, nem szűnik meg az a dinamikus kapcsolatrendszer, amely a külső és belső hálózatok között a vizsgálatunktól függetlenül létezik. A modellben ez azt jelenti, hogy az input szektorok és belső szektorok között, valamint az output szektorok és belső szektorok között ugyanazon típusú dinamikus átadási kapcsolatok valósulnak meg, mint a belső-belső, vagy külső-külső szektorok között. Tehát az új modellezés esetén az ú.n. „kapuknál” nem forgalom megadása történik, mint a hagyományos modelleknél.*

*M<sub>5</sub>. A belső és külső hálózat szektorait tekintve négyféle dinamikus átadási kapcsolat létezik. A teljes hálózat esetében alapvető fontossággal bír a hálózati kapcsolatrendszer definiáló kapcsolati hipermatrix. A teljes belső és teljes külső hálózat dinamikus működését az a kapcsolati hipermatrix*

foglalja egy rendszerbe. A kapcsolati hipermatrix megadja bármely szektor esetében, hogy milyen más szektorokkal áll és milyen dinamikus átadási kapcsolatban. A kapcsolati hipermatrixot tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer írja le a hálózat minden szektorának a dinamikus működését, azaz a teljes hálózat dinamikus működését.

*M<sub>6</sub>. A fentieket figyelembe véve a belső és külső hálózat járműforgalmi folyamatait egyszerre leíró univerzális hálózati modell építhető fel. A módszer lényege, hogy egyszerre vizsgáljuk egy tetszőleges belső hálózati szektor összes dinamikus átadási kapcsolatát és egy tetszőleges külső hálózati szektor összes dinamikus átadási kapcsolatát. Az univerzális hálózat egységes matematikai modellje egy nemlineáris pozitív differenciálegyenlet-rendszer.*

*M<sub>7</sub>. Globális hálózati modellhez jutunk el oly módon, hogy az univerzális hálózati modell belső hálózatát tartalmazó tartományt addig növeljük, amíg a külső tartomány üres halmazzá nem válik. Ekkor az történik, hogy a korábbi  $n$  db belső szektoron a sűrűségek jelölései megmaradnak:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a korábbi  $m$  db külső hálózati szektornál viszont átjelölés történik és ők lesznek az  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  sűrűségű szektorok. Eközben az átjelölés érintetlenül hagyja minden szektor korábbi kapcsolatait, mert a teljes hálózat és a kapcsolatrendszer nem változott meg az átszámozással. (Fentiekkel ekvivalens, ha a külső hálózatot tartalmazó tartományt addig növeljük, amíg a belső tartomány üres halmazzá nem válik.)*

*M<sub>8</sub>. A szűkített hálózati modell esetében a belső hálózati tartományban  $n$  db  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sűrűségű állapotjellemzővel rendelkező szektor van. A külső tartományt az  $m$  db  $s_1, s_2, \dots, s_m$  mért sűrűséggel rendelkező szektort foglalja magában, amelyeknek közvetlen input vagy output átadási kapcsolata van valamely belső szektorral. Ez utóbbi modellt alkalmazhatjuk valós idejű modellezésre és irányításra. Az univerzális és globális modellek viszont az általánosabb működést, rendszerelméleti tulajdonságokat, gazdasági és környezeti jelenségek vizsgálatát és megismerését szolgálhatják.*

#### 4. AZ ÚJ MODELLEZÉSI MÓDSZERTAN ÁLTAL ELÉRT EREDMÉNYEK

Az alábbiakban összefoglaljuk az új modellezési módszer által elért eredményeket, Péter, T. (2019).

I. A nagyméretű közúti közlekedési hálózat működésének átfogó vizsgálatára és a hálózati elemeken áramló bonyolult közlekedési folyamatok dinamikájának leírására, az alábbi hat pontba foglalt új modellezési paradigma mondható ki.

1. A modell a járműsűrűség definiálására matematikailag egzakt fogalmat alkalmaz. Ez a dimenzió nélküli szám az adott időpontban az általánosított szektoron tartózkodó járművek együttes hosszának és az általánosított szektor hosszának hányadosa. A modellben definiált általánosított szektorhossz a szektoron tartózkodó járművek együttes hosszának maximuma, amely egyaránt figyelembe veszi a közlekedési

forgalmi rend sajátosságait és a szektor valós térbeli lefedettségét. Bármilyen hosszúságú általánosított szektor esetében ennek értéke a  $[0,1]$  intervallumban helyezkedik el és ez a definíció kiterjeszthető bármilyen alakú parkolóra is.

2. A közúti járműforgalmi folyamatok egységes dinamikus modelljét egy pulzáló irányított gráf határozza meg. Főszereplők az állapotjellemzővel rendelkező kooperáló általánosított szektorok, amelyek az új gráf csúcsai. Az úthálózaton kialakuló közlekedési folyamat a gráf csúcsai között fellépő dinamikus kooperációk eredménye. A csúcsok közötti élek a fluxusok, azaz a forgalom-áramlások, szintén dinamikusak. A kooperációban egyaránt szabályozott az anyagátadás (járműátadás) mennyisége és a sebessége. A disztribúció és az anyagáram-sebessége egyaránt függ a kooperáló csúcsok állapotjellemzőitől, az őket körülvevő (segítő/akadályozó) környezettől, valamint az időponttól is.

3. A modellezés fontos feltétele az, hogy a vizsgált, nem feltétlenül egyszeresen összefüggő tartományában elhelyezkedő, valós közúti közlekedési hálózati rendszert csupán „virtuális” zárt görbével határoljuk körül. Ennek jelentősége az, hogy a körülhatárolt „belső” hálózat és a komplementer „külső” hálózat között nem szűnik meg az a teljes dinamikus kapcsolatrendszer, amely a vizsgálatunktól függetlenül létezik. Tehát az új modellezés esetén az ú.n. „kapuknál” nem forgalom megadása történik, mint a hagyományos modelleknél.

4. A belső és külső hálózat szektorait tekintve négyféle dinamikus átadási kapcsolat létezik. A teljes hálózat esetében alapvető fontossággal bír a hálózati kapcsolatrendszer definiáló kapcsolati hipermátrix meghatározása.

5. A teljes hálózat dinamikus működését, azaz a teljes hálózat minden szektorának a dinamikus működését a kapcsolati hipermátrixot tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer írja le. Ezt figyelembe véve a belső és külső hálózat járműforgalmi folyamatait egyszerre leíró univerzális hálózati modell építhető fel.

6. Globális hálózati modellhez jutunk el oly módon, hogy az univerzális hálózati modell belső, vagy külső hálózatát tartalmazó tartományt addig növeljük, amíg a komplementer tartomány üres halmazzá nem válik.

II. Kimondható, az alábbi koherencia elv, a sebesség-sűrűség törvényre. Az egyes kijelölt bázis szektorokon a mérések alapján meghatározott bázis sebesség-sűrűség törvényeknek érvényesnek kell maradniuk az ott jelen lévő környezeti paraméterek és adott időpont figyelembevételével, viszont minden egymáshoz csatlakozó kettő vagy több szektor esetében is összefüggő, koherens egységet kell alkotniuk a sebesség-sűrűség törvényeknek.

Ennek a követelménynek megfelelő, a közúti hálózati trajektórián történő mozgás leírására  $n$ -változós sebesség-sűrűség törvényt adhatunk meg. Ez alapján, kimutatható, hogy a hálózat bármely  $n \geq 1$  szektorából álló trajektóriáján a

szabadáramlás feltétele esetén az alábbi  $n$ -változós sebesség-sűrűség törvény érvényes:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{V_i} [1 + f_i(x_i, e_i, t)]}$$

Ahol:

$V_i > 0$  az  $i$ -edik szektoron megengedett maximális sebesség értéke, ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$l_i > 0$  az  $i$ -edik szektor hossza

$x_i = x_i(t)$  az  $i$ -edik szektoron  $t$  időpillanatban fellépő járműsűrűség értéke

$f_i(x_i, e_i, t)$   $i$ -edik szektorra jellemző valós magfüggvény, amelyre:  $f_i(x_i, e_i, t) \geq 0$ ,  $f_i(0, e_i, t) = 0$  és  $f_i(x_i, e_i, t)$  a  $0 \leq x_i < 1$  intervallumon szigorúan monoton növekvő,  $x_i$  szerint differenciálható függvény

$e_i \in \mathcal{R}^p$  az  $i$ -edik szektorra jellemző környezeti paraméterek vektor

A fentiek alapján, a trajektória teljes befutásánál elérhető maximális sebesség az alábbi:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{V_i}}$$

III. A járműforgalmi modellek körében meghatároztuk az univerzális hálózati modell szerkezetét. Ez két diszjunkt hálózatból áll, a belső és a teljes külső komplementer hálózatból és a modell ezek dinamikus kapcsolatrendszerét írja le. Ez alapján levezethető az univerzális hálózati modell forgalmi folyamatait leíró pozitív nemlineáris dinamikus rendszer differenciálegyenlet-rendszerét. A két részhálózat külön-külön a gyakorlati vizsgálatokban szokásos forgalmi hálózatokra vezethető vissza, ezért ezeket szűkített hálózatoknak nevezzük. Ennek alapján, a modell alkalmazásával új, tartomány szintű irányítási módszer valósítható meg lineáris Lyapunov-függvény alkalmazásával, amely a tartományban elhelyezkedő közúti hálózaton, vagy annak tetszőleges részhálózatán ideális járműsűrűség állapot fenntartását biztosítja.

IV. Az univerzális hálózati modell kiterjesztésével meghatározható a globális hálózati modell. Ennek a modellnek a használata a forgalmi folyamatok modellezésén kívül alkalmas a hálózatot érintő gazdasági folyamatokból eredő hatások vizsgálatára is. A modellbe különösebb nehézségek nélkül bevonhatók a járműtermelési és amortizációs folyamatok közúti forgalmi folyamatokra gyakorolt hatásai is.

## 5. ÖSSZEFOGLALÓ ÉS A MODELLALKALMAZÁSOK KITERJESZTÉSE

A kutatások eredményeinek alkalmazása különösen fontos a közúti közlekedési hálózatok fejlesztése területén. A tervezésénél alapprobléma, hogy megfelel-e az adott úthálózat

a fejlesztések után a fenntartható fejlődés kritériumainak. A valós és különböző extrém forgalmi terheléseket is figyelembe véve, nagyszámú, gyors dinamikus szimuláció hajtható végre a járműforgalmi folyamatok kialakulásának analizésére a nagyméretű hálózat-variánsokra. **A kutatások kiterjeszhetőek a párhuzamosan működő forgalmi hálózatok komplex analizésére is.** Az utazások és szállítások gyakran komplex trajektóriákon történnek, amikor a teljes útvonalat többféle forgalmi hálózat rész-trajektóriái alkotják. A különböző dinamikus hálózati forgalmi rendszerek egymással párhuzamosan működnek a saját törvényszerűségeiket és irányításukat követve. Mindegyik működésére hatást gyakorolnak a különböző külső környezeti folyamatok, továbbá az állapotjellemzőik egymás forgalmi folyamataira is kölcsönösen hatást gyakorolnak, ilyen esetekben, nagy jelentősége van a kitűnő információ-kommunikációs rendszerek alkalmazásának, Adam Titrik, István Lakatos, David Czeglédi (2015), Adam Titrik (2016). Ezek a bonyolult kapcsolatok befolyásolják az optimális működéseket és indokolják a különböző dinamikus hálózati forgalmi rendszerek uniójának vizsgálatát és a téma időszerűségét Péter, T. and Szabó, K. (2012.2), Péter, Szabó (2017). A tárgyalt Lyapunov-függvény módszerrel **mérés alapú, valós idejű, tartomány szintű on-line irányítás valósítható meg.** Ez az intelligens rendszer a nagyméretű közúti közlekedési hálózatok optimális irányítására hazánkban megvalósítható, Peter, Bokor and Strobl (2013).

A csomópontok irányításánál az az elvet követhető, hogy annak a csomópontnak a működése az ideális, amely bármely rajta átáramló forgalmat akadályoztatás nélkül enged át. Mivel minden keresztező forgalom akadályozza a másikat, az ideális eset csak oly módon valósul meg, ha minden keresztező forgalom szintben eltoltan működik. A legtöbb esetben gazdasági okok miatt ez nyilván nem alkalmazható. Minden esetben viszont reális követelmény a csomóponton átáramló forgalom akadályozásának minimalizálását előírni. Ez a cél – a csomópontot magában foglaló tartomány szemléletet alkalmazva – úgy valósul meg, hogy olyan **MPC irányítást** szabunk meg, amelynél a tartományban lévő összes elem között és a hozzájuk közvetlenül csatlakozó külső elemek között is együttesen, maximális számú járműátadás valósul meg, ezzel figyelembe véve az egyes áthaladási irányok esetén a csomópont mögött kialakuló torlódások hatását is, Péter and Bokor (2010.1,2010.2), Péter and Bokor (2011), Péter T. (2011.1, 2011.2). **Együtt alkalmazva** a csomóponti irányításokat és a tárgyalt *Lyapunov-függvényt alkalmazó irányítási törvényt a teljes tartományon, illetve azokon a szubtartományokon, ahol kritikus helyzet lép fel, ez a módszer egy új elvű, kettős szintű hibrid fogalomirányítás bevezetéséhez vezet, amely egyszerre valósítja meg a csomópontok optimális átbocsátását és a tartomány szinten az optimális járműsűrűséget is.*

**A sebességfolyamatokat figyelembe véve a Lyapunov-függvény módszer kiterjeszhető a környezeti terhelések tartomány szintű optimalizálására is** Péter (2015.1), Péter, Lakatos, Szauter (2015), ASME/IEEE, Boston, Lakatos, I (2010). I. Lakatos, Á. Titrik T. Orbán (2011).

A nagyméretű hálózati modellből a validálásokra kinyert sebességprofilok további alkalmazásainak **kutatásai kiterjeszhetőek** elektromos járműveknél, valós

sebességfolyamatok mellett végzett laboratóriumi **diagnosztikai célokra** is, PUP Dániel, TITRIK Ádám, SZAUTER Ferenc, BISITS László (2013). Ezek a sebességfolyamatok a valóságnak megfelelően bonyolultak, összetettek, gyorsulások, lassulások és gyakori megállások sorozatából állnak, T. Peter, and M. Basset (2009).

A valóságos folyamatok ilyenek és ezek eltérnek a laboratóriumban a görgős fékpadon alkalmazottaktól. Az európai menetciklus (NEDC) az EU-ban jóváhagyott laboratóriumi tesztet alkalmaz, amelyeknek kiindulópontjai két európai főváros (Párizs és Róma) forgalmi adatai voltak. A valóságban azonban a járművek károsanyag-kibocsátása, ill. energiafogyasztása nagymértékben függ a vezetési stílustól, továbbá nagy hatással van rá az adott forgalom alakulása is. Jelentős eltérések léphetnek fel a különböző régiókban és országokban is. A trajektória geometriák és sebességfolyamatok tárolása térbeli jármű dinamikus folyamatok analizését teszi lehetővé a hálózati forgalmi folyamatok közepette. Egy ilyen irányú laborfejlesztés nagy volumenű, gyorsított vizsgálatok elvégzését teszi lehetővé nagy mennyiségű adat kiértékelésénél a különböző hálózati folyamatok és események generálásával, Péter, Szauter, Bokor (2014), Péter, Szauter, Bokor (2015), ASME/IEEE, Boston, Péter, Lakatos, Szauter, Pup (2016.1), Péter, Lakatos (2017). Intelligens vezetői modellek (IDM) vizsgálhatók a nagy tömegáramlatok közepette, a makroszkopikus hálózati modell biztosította környezetben, Derbel, Péter, Mourllion, Basset (2017).

Végül, érdekes alkalmazás lehet a tárgyalt dinamikus rendszer felhasználása, egy modell-bázisú folyamat-kutatásra is, amely a globális közúti közlekedési folyamatok fejlődésének és ciklikusságának komplex környezeti, társadalmi-gazdasági kapcsolatait vizsgálja.

A globális modell egy nemlineáris autonóm dinamikus rendszer, amelynél a közúti közlekedési áramlatok rövid ciklusú periodicitásait a szektorok között fennálló disztribúciók változásai okozzák, amelyek az egyes hálózati tartományokban függvényei a társadalmi és gazdasági állapotoknak és igényeknek, a meteorológiai és a napszaki állapotoknak. Pl. ez utóbbi hatása az, hogy a földfelszín különböző pontjain reggel elindul és estére lecsillapodik a dinamizmus.

A hosszabb ciklusú, általános környezeti és gazdasági folyamatok fejlődésénél viszont közvetlenül a járműgyártásból eredő ráterhelések és amortizációk a meghatározók. Ez esetben az egyes hálózati tartományokban a társadalmi-gazdasági, népesedési folyamatokon kívül az itt és egyéb területeken végbemenő innováció hatásai és a végrehajtott, vagy elmaradt hálózatfejlesztések töltenek be fontos szerepet a közúti közlekedés fejlődésében és a globális hullámtulajdonságok alakulásában

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A konferencia cikk a TKP2021-NKTA-48 számú projekt a Technológiai és Ipari Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NKTA pályázati program finanszírozásában valósult meg.



## IRODALOM

- Arneson and Langbort (2009): Heather Arneson, Cédric Langbort, Linear Programming Based Routing Design for a Class of Positive Systems with integral and Capacity Constraints. Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems, Venice, Italy, September 24-26, 2009
- Bastin, Haut, Coron, d'Andréa-Novel (2007): G. Bastin, B. Haut, J-M. Coron, B. d'Andréa-Novel, Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws. Networks and Heterogeneous Media (NHM), American Institute of Mathematical Sciences Volume 2, Number 4, December 2007 pp. 749–757
- Bielefeldt and Busch (1994): C. Bielefeldt and F. Busch, “MOTION-a new on-line traffic signal network control system,” in *Proc. the 7th International Conference on Road Traffic Monitoring and Control*, London, England, Apr. 1994, pp. 55–59.
- Boillot, Blosseville, Lesort, Motyka, Papageorgiou, and S. Sellam (1992): F. Boillot, J. Blosseville, J. Lesort, V. Motyka, M. Papageorgiou, and S. Sellam, Optimal signal control of urban traffic networks, in *Proc. of Conference on Road Traffic Monitoring and Control*, Apr. 1992, pp. 75–79.
- Bretherton, Bodger, Baber, and Controls (2004): D. Bretherton, M. Bodger, N. Baber, and S. Controls, “SCOOT-the future [urban traffic control],” in *Proc. 12th IEEE International Conference on Road Transport Information and Control*, Apr. 2004, pp. 301–306.
- Bretti, Natalini, Piccoli (2007): Gabriella Bretti · Roberto Natalini · Benedetto Piccoli, A Fluid-Dynamic Traffic Model on Road Networks, *Arch Comput Methods Eng*, 13 March 2007, pp. 1-34. DOI 10.1007/s11831-007-9004-8
- Cremer and Papageorgiou (1981): Cremer, M., and Papageorgiou, M., Parameter identification for a traffic flow model. *Automatica*, 17, 837-843. (1981).
- Daganzo (1994): Daganzo C.F., The cell transmission model: a simple dynamic representation of highway traffic. *Trans. Res. B*, 28, 269–287. (1994) doi:10.1016/0191-2615(94)90002-7,
- Daganzo (1995): Daganzo C.F., The cell transmission model. Part II: Network Traffic. *Transportation Research B*, 29(2):79-93, 1995.
- Derbel, Péter, Mourllion, Basset (2017): O Derbel, T Péter, B Mourllion, M Basset, Generalized Velocity–Density Model based on microscopic traffic simulation *Transport*, 1-13 (2017)
- Farges, Henry, and Tufal (1983): J. Farges, J. Henry, and J. Tufal, “The PRODYN real-time traffic algorithm,” in *Proc. 4th IFAC Symposium of Transportation Systems*, Baden Baden, Germany, Jun. 1983, pp. 307–312.
- Gartner (1983): N. Gartner, “Simulation study of OPAC: A demand-responsive strategy for traffic signal control,” *Transportation and Traffic Theory*, pp. 233–250, 1983.
- Haut, Bastin and Chitour (2005): B. Haut, G. Bastin and Y. Chitour, A macroscopic traffic model for road networks with a representation of the capacity drop phenomenon at the junctions. Digital Object Identifier (DOI) 10.3182/20050703-6-CZ-1902.02042. Page Numbers: 2041-2041. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005.
- Herty (2014): Michael Herty, Control concepts for traffic flow and supply chain networks governed by hyperbolic partial differential equations, pp. 1-31., IGPM, RWTH Aachen, [www.sites.google.com/michaelherty](http://www.sites.google.com/michaelherty) 28.01.2014. Paris
- Kövesné (2003.1): Kövesné dr. Gilicze Éva, A globalizáció hatása a városi közlekedési rendszer fejlesztésére Városi Közlekedés XLII. évf. 2.sz. 2003. április p. 61-66
- Lakatos, I (2010): *Instacioner üzemállapotú motorteljesítmény-mérés görgős járműfékpadon* In: Bikfalvi, MicroCAD 2010: XXIV. microCad International Scientific Conference: E szekció: Anyagtudomány és -technológia. Miskolci Egyetem (2010) pp. 33-38. , 6 p.
- I. Lakatos, Á. Titrik T. Orbán (2011): Data determination of an internal combustion engine for model set-up. (2011) HUNGARIAN JOURNAL OF INDUSTRY AND CHEMISTRY 0133-0276 2450-5102 39 1 35-40
- Lighthill M. J.; Whitham G. B., (1955): Lighthill, M. J. and Whitham, G. B., „On kinetic waves. I: Flood movement in long rivers. II. A theory of traffic flow on long crowded roads”, *The Royal Society: Proceedings*, London, A, vol. 229, iss. 1178, pp. 281-345, May 1955.
- Lin, De Schutter, Xi, and Hellendoorn (2011): S. Lin, B. De Schutter, Y. Xi, and H. Hellendoorn, “Fast model predictive control for urban road networks via MILP,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 12, no. 3, pp. 846–856, Sept. 2011.
- Lowrie (1982): P. Lowrie, “The Sydney coordinated adaptive traffic system: principles, methodology, algorithms,” in *Proc. the International Conference on Road Traffic Signalling*, Mar. 1982, pp. 67–70.
- Muralidharan and Horowitz (2012): Ajith Muralidharan and Roberto Horowitz, Optimal control of freeway networks based on the Link Node Cell Transmission model, American Control Conference, Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada, June 27-June 29, 2012.
- T. Peter, and M. Basset (2009): Tamas PETER, Michel BASSET, Application of new traffic models for determine optimal trajectories, pp. 89-94. Sessions 1 Automation and Mechatronics. (1-C-1 Sistem Modelling and Control). Oct.21-Oct.23, INTERNATIONAL FORUM ON STRATEGIC TECHNOLOGIES (IFOST 2009) HoChiMinh City University of Technology, Vietnam.
- Péter T. and Bokor J. (2010.1): Péter T. and Bokor J., Research for the modelling and control of traffic, FISITA World

- Automotive Congress, Budapest, 30 May - 4 June 2010. Book of abstracts, pp. 66-73. In: Scientific Society for Mechanical Engineering, (ISBN:978-963-9058-28-6).
- Péter and Bokor (2010.2): Péter, T., and Bokor, J., Modeling road traffic networks for control. Annual international conference on network technologies & communications: NTC 2010. Thaiföld, 2010.11.30-2010.11.30. pp. 18-22. Paper 21. (ISBN:978-981-08-7654-8)
- Péter and Bokor (2011): T. Peter, J. and Bokor, New road traffic networks models for control, *GSTF International Journal on Computing*, vol. 1, Number 2. pp. 227 -232. DOI: 10.5176\_2010-2283\_1.2.65 February 2011
- Péter T. (2011.1): Dr Péter Tamás, Csomópontok optimális működtetése közúti közlekedési hálózatban, a matematikai modell tárgyalása. *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE LX. évfolyam:(1.) pp. 27-33. Paper Közúti közlekedés.* (2011)
- Péter T. (2011.2): Dr Péter Tamás, Csomópontok optimális működtetése közúti közlekedési hálózatban, a számítási eredmények vizsgálata. *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE LX. évfolyam:(2) pp. 4-14. Paper 1.* (2011)
- Péter, T. (2012.1): Peter, T, Modeling nonlinear road traffic networks for junction control, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS)*, 2012, Vol. 22, No. 3. pp. 723-732. DOI: 10.2478/v1006-012-0054-1
- Péter, T. and Szabó, K. (2012.2): Tamás PÉTER and Krisztián SZABÓ, A new network model for the analysis of air traffic networks. *Periodica Polytechnica - Transportation Engineering* 40:(1), pp 1-9, (2012)
- Péter, Szauter, Bokor (2014): Péter T., Szauter F., Bokor J., A közúti közlekedés forgalmi folyamatainak komplex analízise. *Közlekedéstudományi Szemle LXIV. Évf. 5. sz. 2014. okt.* pp. 18-28.
- Péter, Szauter, Bokor (2015): Péter, T., Szauter, F., Bokor, J., Complex analysis of the dynamic effects of car population along the trajectories, *ASME/IEEE, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference: Mechatronics for Electrical Vehicular Systems.* August 2-5, 2015, Boston, USA. American Society of Mechanical Engineers (ASME), Paper DETC2015-47075; V009T07A070. pp. 1-6.. (ISBN:978-0-7918-5719-9), doi:10.1115/DETC2015-47075
- Péter, Lakatos, Szauter, Pup (2016.1): Péter T, Lakatos I, Szauter F, Pup D, Complex analysis of vehicle and environment dynamics 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications. Auckland, New Zealand, 2016.08.29-2016.08.31. New York: IEEE, 2016. Paper 34. <http://www.mesa2016.org/> DOI: 10.1109/MESA.2016.7587112
- Péter, Lakatos (2017): T. Péter, I Lakatos, Hybrid model of vehicle and traffic for combined dynamic analysis *International journal of heavy vehicle systems* Vol. 24, No. 2, 2017 pp. 97-112
- Péter, Szabó (2017): T. Péter, K Szabó, Combined Mathematical Modeling of Different Transport Networks, Considerations and Complex Analysis *Acta Polytechnica Hungarica* 14 (2), 7-26 (2017)
- Péter, T. (2019): Péter Tamás, Közúti járműforgalmi folyamatok nemlineáris modellezése nagyméretű hálózatokon, MTA Doktori értekezés pp 1-42
- PUP Dániel, TITRIK Ádám, SZAUTER Ferenc, BISITS László (2013): Intelligens elektromos hajtáslánc illesztése és optimalizálása egy meglévő városi járműbe. (2013) Megjelent: OGÉT 2013 XXI Nemzetközi Gépészeti Találkozó pp. 330-333,
- Richards (1956) Richards, Paul I., Shock waves on the highway, *Operations Research*, vol. 4, iss. 1, pp. 42-51, 1 February 1956.
- Ramezani, Haddad, and Geroliminis (2012): Mohsen Ramezani, Jack Haddad, and Nikolas Geroliminis, Macroscopic Traffic Control of a Mixed Urban and Freeway Network, *Swiss Transport Research Conference*, pp. 1-6, 2012.
- Robertson and Bretherton (1991): D. Robertson and R. Bretherton, "Optimizing networks of traffic signals in real time - The SCOOT method," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 40, no. 1, pp. 11–15, 1991.
- Sen and Head (1997): S. Sen and K. Head, "Controlled optimization of phases at an intersection," *Transportation Science*, vol. 31, no. 1, pp. 5–17, 1997.
- Tar et al., (2012): Tar JK, Rudas IJ, Nádai L, Várkonyi TA., A közúti közlekedés kvázistacionárius adaptív, iteratív szabályozása két ellentmondó kritérium szerint, *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE* 52: (3) pp. 42-48. (2012)
- Tánczos (2001): Tánczos Lászlóné, A közlekedés hálózatfejlesztési, fenntartási és üzemeltetési források hatékony allokációját megalapozó vizsgálati módszerek, különös tekintettel az externáliák hatásainak figyelembevételére, *Közlekedéstudományi Szemle*, 2001, 9. szám p. 321-326.
- Adam Titrik, István Lakatos, David Czeglédi (2015): Saturation Optimization of Selective Waste Collection Vehicles Based on Real-Time Info-Communication System. *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*
- Adam Titrik (2016): Ádám Titrik. Sign-in-time Based Info-communication System for Collecting Selective Waste. (2016) *PERIODICA POLYTECHNICA TRANSPORTATION ENGINEERING* 0303-7800 1587-3811 44 1 1-4
- Varga and Bokor (2007): István Varga, József Bokor, *New Approach in Urban Traffic Control Systems*, *Periodica Polytechnica ser. Transp. Eng.*, Budapest, Hungary, 2007, Vol. 35. No 1-2. pp. 3-13
- Wang, Papageorgiou et al., (2009): Wang Y., Papageorgiou M., Messmer A., Coppola P., Tzimitsi A. and Nuzzolo A. An adaptive freeway traffic state estimator *Automatica* 45 (2009) 10-2