

A Monte-Carlo Szimuláció alkalmazása rendszerek és folyamatok vizsgálatára

Pokorádi László

Óbudai Egyetem, Mechatronikai és Járműtechnikai Intézet,
1081 Budapest, Népszínház utca 8.
pokoradi.laszlo@bgk.uni-obuda.hu

Kivonat: A műszaki rendszerek működésének velejárója a parametrikus bizonytalanság, amit a véletlen környezeti hatások, illetve a rendszer belső paramétereinek üzemeltetés közbeni sztochasztikus változásai. A parametrikus bizonytalanságok a vizsgált rendszer matematikai modelljének felhasználásával vizsgálható. Az egyik lehetséges parametrikus bizonytalansági elemzési módszer a Monte-Carlo szimuláció. A tanulmány a Monte-Carlo szimulációt és – két esettanulmányom keresztül – mérnöki alkalmazási lehetőségeit mutatja be.

1. BEVEZETÉS

A matematikai modellek alkotása és alkalmazása során számolnunk kell bizonyos mértékű parametrikus bizonytalansággal. Ennek egyik fő oka lehet a modellezett rendszer bemenő adatainak véletlenszerű változása, például a környezet időjárás okozta változásai. A valószínűségi bizonytalanságelemzési módszer a bizonytalan jellemzők értékeihez valamilyen valószínűségi eloszlásokat rendel. Ekkor a rendszer kimenő jellemzőinek valószínűségi eloszlásai a

$$\mathbf{d}_y = f_d(\mathbf{d}_x) \quad (1)$$

általános alakú függvénnyel határozhatók meg, ahol:

\mathbf{d}_x – független változók valószínűségi eloszlásainak vektora;
 \mathbf{d}_y – függő változók valószínűségi eloszlásainak vektora.

Az f_d általános alakú függvény adott esetekben meghatározható közvetlen módszerekkel, vagy a Monte-Carlo szimuláció alkalmazásával.

Mi, magyarok a Monte-Carlo szimulációt gyakran Neumann Jánoshoz kötjük. Az első olyan publikáció, melyben a szerzők a módszert Monte-Carlo-nak nevezték, Metropolis és Ulam (1949) nevéhez köthető. Bár, őket megelőzően is már alkalmaztak statisztikai mintavételezési elemző módszereket a természettudományokban. Talán a legkorábbi dokumentált véletlenszerű mintavétel az integrál megoldásának megtalálására Comte de Buffon (1777) nevéhez fűződik. Illetve Lord Kelvin 1901-ben a klasszikus rendszerek belső energiaegyensúlyát vizsgálta az atomok és molekulák véletlen ütközéseinek modellezésével (Newman & Barkeman, 1999).

Jelen tanulmány célja, bemutatni a Monte-Carlo szimuláció műszaki gyakorlatban való alkalmazhatóságát a parametrikus modellbizonytalanság leírására és mérnöki szempontú elemzésére.

A publikáció az alábbi fejezetekből áll: A 2. fejezet magát a Monte-Carlo szimulációt mutatja be, műszaki megközelítés-

sel. A 3. fejezetben az üzemeltetési folyamatok szimulációs elemzési módszere ismerhető meg. A 4. fejezet egy komplex-kapcsolatú rendszer szimulációját írja le. Végezetül az 5. fejezet foglalja össze a tanulmányt.

2. A MONTE-CARLO SZIMULÁCIÓ

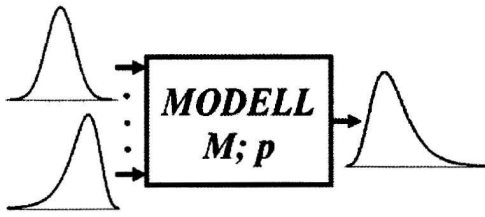
A Monte-Carlo szimulációval kapcsolatban számos „tisztán matematikai” és műszaki irodalom foglalkozik. Az eljárás matematikai alapjai a (Metropolis & Ulam, 1949); (Bronstejn et.al., 2013) és (Kalos & Whitlock, 2008) irodalmakból ismerhetők meg. Antal és szerzőtársai a módszert döntésmogató rendszerhez alkalmazták (Antalet.al, 2014). Dagpunar (2007) pénzügyi folyamatok modellezését vizsgálta. Newman és Barkeman (1999) statisztikai fizikában alkalmazta a módszert. A Szerző jelen publikációban bemutatásra kerülő eseteken túl Monte-Carlo szimulációs vizsgálatot alkalmazott helikopter leszállóhelyek zajterhelésének becslésére (Bera & Pokorádi, 2014); (Bera & Pokorádi, 2015), illetve geotermikus folyadékcszállító rendszerek teljesítményigényének elemzésére (Pokorádi & Molnár 2013).

A Monte-Carlo-eljárások alapötlete, hogy egy rendszer kimenő jellemzőinek valószínűségi eloszlásait azok analitikus megoldása helyett valamilyen mintavételezési eljárással közelítjük.

A technikai rendszerek szimulációs elemzése esetén a következő lépéseket alkalmazzuk (Pokorádi, 2016):

- kellő számú független, adott eloszlású mintahalmazt generálunk;
- a generált minta alapján – a rendszer matematikai modelljének felhasználásával – határozzuk meg a rendszer lehetséges válaszait;
- a kapott válaszerőtekek statisztikai elemzésével meghatározzuk a rendszer kimenő jellemzőinek várható valószínűségi eloszlását.

Ezt szemlélteti az 1. ábra.



1. ábra A Monte- Carlo szimuláció

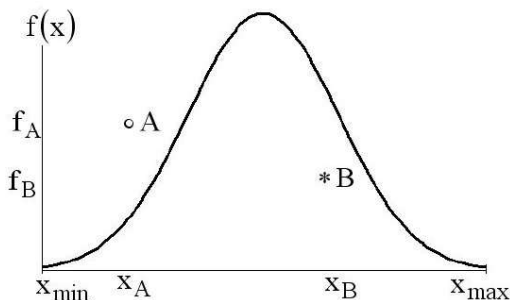
A vizsgált rendszer bemenő jellemzőinek értékeit a mérési eredmények statisztikai kiértékeléseinek vagy szakértői tapasztalatok generáljuk. Ehhez a leginkább ismert eljárások:

- inverz eloszlásfüggvény módszer;
- direkt transzformációs módszer;
- dob-elvet módszer (Kalos & Whotlock, 2008).

Ez utóbbi, a Neumann-féle dob-elvet (hit and miss), vagy más néven a kiszorításos eljárás főbb lépései a következők:

- 1) az egyenletes eloszlású véletlen szám generátor (ezzel minden programnyelv rendelkezik) felhasználásával kiválasztunk a gerjesztési tartományon belül egy x értéket;
- 2) majd ehhez hozzárendelünk egy y_x véletlen értéket;
- 3) az előre meghatározott valószínűségi sűrűségfüggvény alapján döntünk a generált x számról:
 - ha $y_x > f(x)$, „elvetjük” az adott x értéket (lásd A pont a 2. ábrán);
 - ha $y_x < f(x)$, „megtartjuk” és a szimuláció során, mint input érték alkalmazzuk az adott x értéket (lásd B pont a 2. ábrán).

Az eljárás kellő számú alkalmazása esetén megfelelő valószínűségi eloszlással bíró adatsokaságot kapunk (Bera & Pokorádi, 2014).



2. ábra A dob-elvet eljárás szemléltetése

A műszaki gyakorlatban alkalmazott Monte-Carlo módszer előnye, hogy nincs szükség a sokszor igen bonyolult analitikus, esetleg numerikus módszerekkel történő modellmegoldásra, hanem „csupán” véletlen számok generálásával válaszolhatók meg a feltett kérdések. A mintavételezést kellő számban elvégezve a kapott eredményeket elemezve megbecsülhetjük – és adott szakmai szempontból értékelhetjük – a várható rendszerválaszok valószínűségi eloszlásait. Végül az így kapott eredményeket szakmai szempontból kell értékelnünk.

Egy üzemeltetési folyamat sztochasztikus matematikai modellje felhasználható a vizsgált üzemeltetési rendszer szimulációs elemzésére (Pokorádi, 2019a). Úgynevezett beállt üzemeltetési folyamatot tapasztalhatunk a bejáratási és a kiöregedési szakaszok között, ha nem lép fel jelentős változás az üzemeltetési körülményekben. Az ilyen folyamatokat stacioner Markov-folyamattal tudjuk matematikailag modellezni. Az üzemeltetési folyamat során fellépő állapotváltások β_{ij} állapotváltási valószínűségi sűrűségekkel (meghibásodások esetén λ_i meghibásodási rátával; javítások esetén μ_j javítási rátával) jellemezhetők, melyek a

$$\mathbf{B}_{N \times N} = [\beta_{ij}] \quad (2)$$

mátrixba rendezhetők. Beállt folyamat esetén felírható a

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = [\mathbf{B}^T - \mathbf{E}]\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3)$$

mátrix egyenlet, ahol:

\mathbf{E} – egységmátrix;

\mathbf{p} – az állapotokban való tartózkodások valószínűség-vektora;

τ – idő.

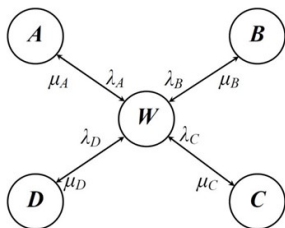
Az egyenletrendszer megoldásakor problémaként jelentkezhet, hogy a triviális megoldást kapjuk meg. Ezért a megoldás

$$\sum_{i=1}^n P_i(\tau) = I \quad (4)$$

egy további feltételét is be kell vezetni, ahol n az üzemeltetési állapotok száma. A (4) egyenlet azt fejezi ki, hogy az üzemeltetés tárgya csak a modellezett állapotok valamelyikében tartózkodhat. Ezzel a (3) egyenletet a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T - \mathbf{E} & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & P_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \\ \vdots \\ P_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

alakúra módosítható, mely bármely egyenletrendszer megoldó módszerrel az eredeti egyenlet triviálistól eltérő megoldását adja.



3. ábra A folyamat gráf modellje

W – rendelkezésre állás; 1 – A típusú meghibásodás javítása; 2 – B típusú meghibásodás javítása; 3 – C típusú meghibásodás javítása; 4 – D típusú meghibásodás javítása

A vizsgált technikai rendszer üzemeltetése során négy (A; B; C; D) eltérő típusú – egy-egy részegységéhez kötődő – meghibásodást tapasztaltak. A folyamatot a 3. ábrán látható súlyozott élű, irányított gráffal szemléltetjük, ahol az élek súlyát az állapotváltási valószínűség sűrűségek (meghibásodási, illetve megfordulási ráták) adják meg. A meghibásodások és a javítási idejeinek elsődleges statisztikai értékelésének adatait az 1. Táblázat tartalmazza.

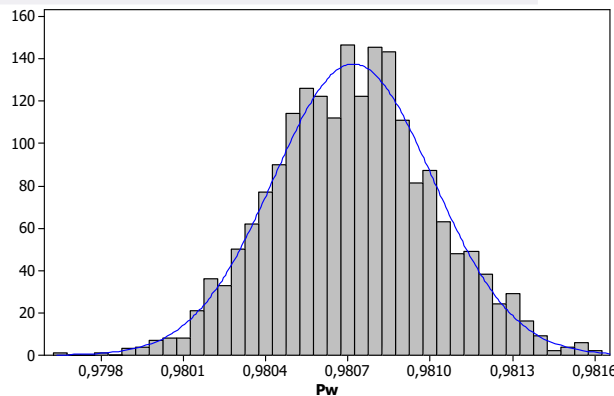
1. Táblázat Adatok statisztikai elemzésének eredményei

Meghibásodás	A	B	C	D
Minták száma	23	24	25	21
MTTF [óra]	183663	162129	152848	179820
Mín. meghibásodási idő [óra]	179709	159714	149470	173679
Max. meghibásodási idő [óra]	187468	167897	155381	183656
Meghibásodási idők szórása [óra]	2035	1873	1618	2247
Átlagos javítási idő MTTR [óra]	1092,2	1081,8	161,86	1084,3
Mín. javítási idő [óra]	1062	1036,7	117,16	1043
Max. javítási idő [óra]	1136,5	1142,9	196,94	1126,9
Javítási idők szórása [óra]	19,4	25,1	22,43	25,5

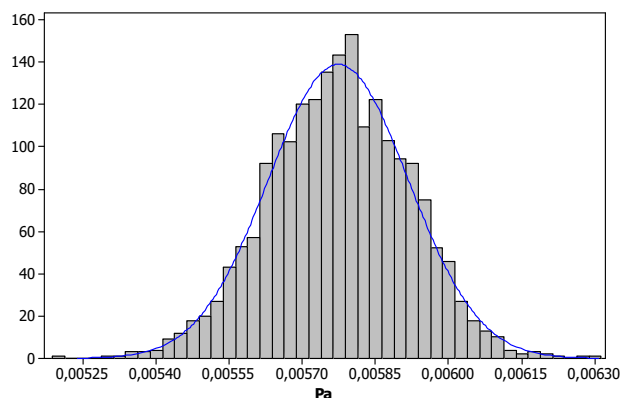
A rendelkezésre álló adatok viszonylag kis száma miatt a statisztikai illeszkedésvizsgálattól eltekintettünk, és az általános mérnöki gyakorlatnak megfelelően feltételeztük, hogy a mért jellemzők normál valószínűségi eloszlással bírnak.

3.1. A szimuláció futtatása

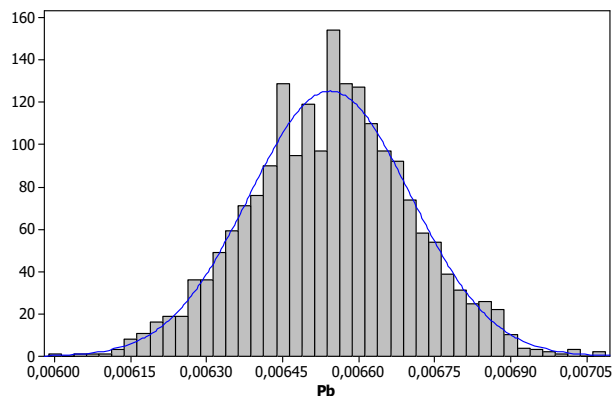
Kettőezer gerjesztést alkalmazva futtattuk le a fentebb leírt sztochasztikus modellt. Ez a gerjesztés szám már statisztikailag elegendő adatot szolgáltat, így korrekt szakmai következtetéseket vonhatunk le a kapott futtatási eredményekből. Az eredmények a 4. – 8. ábrákon láthatóak.



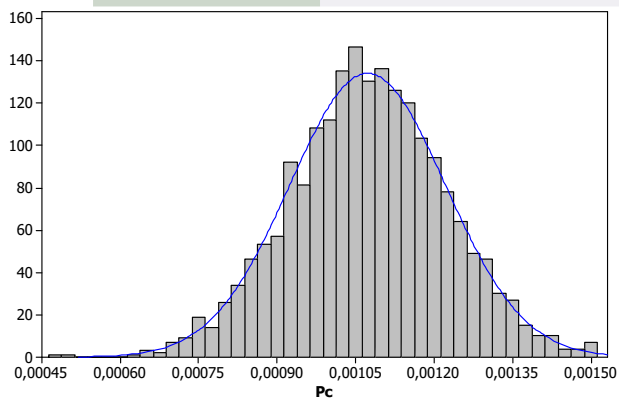
4. ábra Az üzemképességi valószínűségek hisztogramja



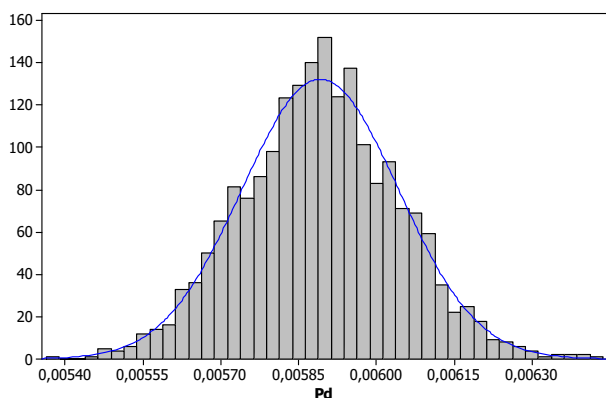
5. ábra Az A típusú meghibásodási valószínűségek hisztogramja



6. ábra A B típusú meghibásodási valószínűségek hisztogramja



7. ábra A C típusú meghibásodási valószínűségek hisztogramja



8. ábra A D típusú meghibásodási valószínűségek hisztogramja

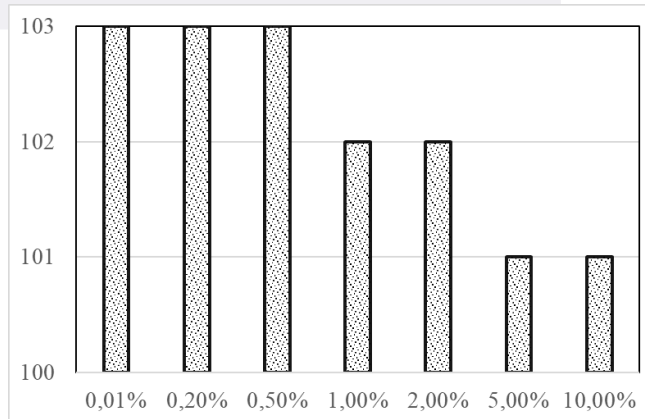
3.2. A szükséges tartalékberendezések számának meghatározása

Vizsgálatunkat alapvetően az üzemeltető szempontjából végeztük el. Így számunkra a legfontosabb kérdés a tartalékberendezések szükséges számának ismerete. Az N_{RNS} szükséges tartalékberendezés szám meghatározását a berendezés P_W rendelkezésre-állási valószínűség ismeretében tudjuk elvégezni az alábbi egyenlet segítségével:

$$N_{RNS} = \left\lceil \left(\frac{1}{P_W} - 1 \right) N \right\rceil \quad (6)$$

ahol:

N – a rendszerben működő berendezések száma.



9. ábra A szükséges tartalékberendezés számok 5000 működő berendezésszám esetén

Az így meghatározott szükséges tartalékberendezés számmal biztosítható, hogy az üzemeltető által elfogadható kockázati szintnél kisebb valószínűséggel nem lesz rendelkezésreálló üzemképes tartalékalkatrész a raktárban.

3.3. A meghibásodások számának meghatározása

A bekövetkező meghibásodások (javítási állapotban való tartózkodások) N_{Fi} száma az:

$$N_{Fi} = \left\lceil \frac{T \cdot P_i}{MRTT_i} N \right\rceil \quad (7)$$

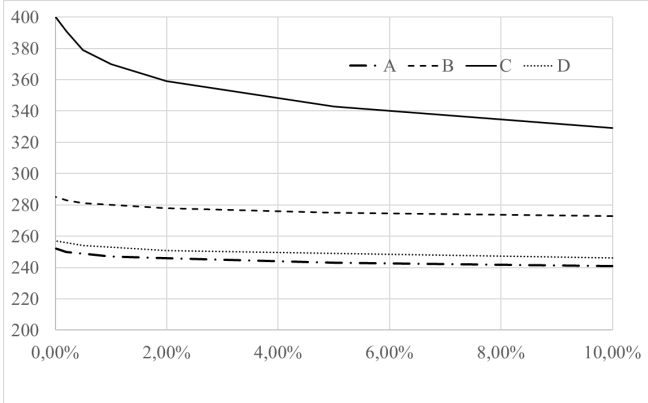
egyenlettel adható meg, ahol:

T – a vizsgálati idő hossza.

A meghibásodások számainak esetében is a szükséges tartalékberendezés szám meghatározásánál leírt problémával találkozunk. Ekkor meg kell keresnünk mely P_{iE} érték esetén lesz az üzemeltető által elfogadható R kockázati valószínűségnél nagyobb az i -edik meghibásodás bekövetkezési valószínűsége. Például, – a standard normál eloszlás alapján – 10 %-os becslési kockázat esetén:

$$P_{iE} = m_i + 1.29s_i \quad (8)$$

Ennek ismeretében határozhatjuk meg a különböző becslési kockázati értékekhez tartozó szükséges tartalékberendezés számot. Ezen eredményeket szemlélteti a 10. ábra.



10. ábra Az 1 évre tervezhető meghibásodások száma a becslési kockázat függvényében

A szimulációs eredmények alapján megfelelő megbízhatósággal (becslési kockázattal) tervezhető a vizsgált eszközpark adott – esetünkben 1 éves – időszakra vonatkoztatott javítási költsége, adott esetben munka-, anyagigénye, illetve logisztikai, szállítási költsége.

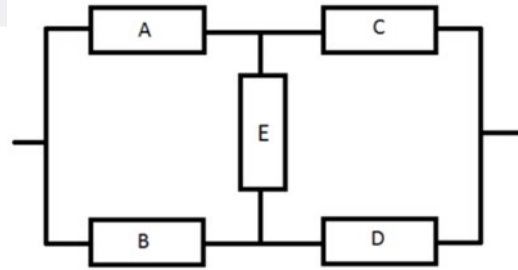
A 9. és 10. ábrák grafikonjainak összehasonlításakor könnyen észrevehető, hogy a várható meghibásodások száma jóval nagyobb, mint a szükséges tartalékberendezések száma. Ez elsőre ellentmondásosnak tűnhet. Viszont azt is figyelembe kell vennünk, hogy a meghibásodási értékek egy adott hosszúságú – esetünkben 1 éves – időintervallumra vonatkoznak, még a szükséges tartalékok száma független a vizsgálati idő hosszától. Ne feledjük el, hogy a megjavított berendezések visszakerülnek az üzemeltetőhöz, ahol – vélhetőleg – először tartalékok lesznek, majd felváltják a később meghibásodott berendezéseket.

4. KOMPLEX KAPCSOLATÚ RENDSZER MEGBÍZHATÓSÁGÁNAK ELEMZÉSE

A korszerű közlekedési és járműtechnikai rendszerek komplex kapcsolattal bíró hálózati struktúrával bírnak. Ezzel a kérdéskörrel foglalkozik Fazekas és szerzőtársainak (Fazekas et.al., 2014) munkája. A közúti járművekben alkalmazott szenzorok, szenzorhálózatok elemzésével foglalkozik Nagy és Tuloki (2018) publikációja. A Szerző korábbi kutatásai során a komplex-kapcsolatú rendszerek megbízhatóságelemzési eljárásait vizsgálta. Eredményeiről – többek közt – a (Pokorádi, 2019b) és (Pokorádi, 2021) publikációiban számolt be. Munkájához elméleti alapokat Guizani és szerzőtársai (Guizani et.al., 2010) könyve adott.

A 11. ábrán egy híd-strukturájú rendszer látható.

Az egyik megközelítés a komplex kapcsolatú rendszerek megbízhatóságának meghatározására az Igazságtábla alkalmazása (2. Táblázat).



11. ábra Híd-strukturájú rendszer blokkdiagramja

2. Táblázat Híd-strukturájú rendszer igazságtáblája

i	A	B	C	D	E	System	Q_i
1	0	0	0	0	0	0	$p_A p_B p_C p_D$
2	1	0	0	0	0	0	$r_A p_B p_C p_D$
3	0	1	0	0	0	0	$p_A r_B p_C p_D$
4	1	1	0	0	0	0	$r_A r_B p_C p_D$
5	0	0	1	0	0	0	$p_A p_B r_C p_D$
6	1	0	1	0	0	1	$r_A p_B r_C p_D$
7	0	1	1	0	0	0	$p_A r_B r_C p_D$
8	1	1	1	0	0	1	$r_A r_B r_C p_D p_E$
9	0	0	0	1	0	0	$p_A p_B p_C r_D$
10	1	0	0	1	0	0	$r_A p_B p_C r_D$
11	0	1	0	1	0	1	$p_A r_B p_C r_D$
12	1	1	0	1	0	1	$r_A r_B p_C r_D p_E$
13	0	0	1	1	0	0	$p_A p_B r_C r_D$
14	1	0	1	1	0	1	$r_A p_B r_C r_D p_E$
15	0	1	1	1	0	1	$p_A r_B r_C r_D p_E$
16	1	1	1	1	0	1	$r_A r_B r_C r_D p_E$
17	0	0	0	0	1	0	$p_A p_B p_C p_D$
18	1	0	0	0	1	0	$r_A p_B p_C p_D$
19	0	1	0	0	1	0	$p_A r_B p_C p_D$
20	1	1	0	0	1	0	$r_A r_B p_C p_D r_E$
21	0	0	1	0	1	0	$p_A p_B r_C p_D$
22	1	0	1	0	1	1	$r_A p_B r_C p_D r_E$
23	0	1	1	0	1	1	$p_A r_B r_C p_D r_E$
24	1	1	1	0	1	1	$r_A r_B r_C p_D r_E$
25	0	0	0	1	1	0	$p_A p_B p_C r_D$
26	1	0	0	1	1	1	$r_A p_B p_C r_D r_E$
27	0	1	0	1	1	1	$p_A r_B p_C r_D r_E$
28	1	1	0	1	1	1	$r_A r_B p_C r_D r_E$
29	0	0	1	1	1	0	$p_A p_B r_C r_D r_E$
30	1	0	1	1	1	1	$r_A p_B r_C r_D r_E$
31	0	1	1	1	1	1	$p_A r_B r_C r_D r_E$
32	1	1	1	1	1	1	$r_A r_B r_C r_D r_E$

4.1. A különböző üzemmódok megbízhatóságai

Általános esetben egy híd-strukturájú rendszer működik, ha egy jel vagy anyag „átmegy” rajta, azaz:

(9)

$$R_{sys} = Q_6 + Q_8 + Q_{11} + Q_{12} + Q_{14} + Q_{15} + Q_{16} + Q_{22} + Q_{23} + Q_{24} + Q_{26} + Q_{27} + Q_{28} + Q_{30} + Q_{31} + Q_{32} \quad (9)$$

Kritikus üzemmód esetén nincs redundancia a rendszerben. Ez azt jelenti, hogy egyetlen elem kiesése is már a rendszer leállását eredményezi. A kritikus rendszerállapot bekövetkezési valószínűsége az

$$R_{crit} = Q_6 + Q_{11} + Q_{23} + Q_{26} \quad (10)$$

egyenlettel határozható meg.

A járművekben általában a Wheatstone hídhoz hasonló kialakítású (Wheatstone Like Bridges – WLB) szenzorokat alkalmaznak. A Wheatstone hídhoz hasonló rendszerek üzembeszállapotában az összes alkatrésznek működőképesnek kell lennie, azaz:

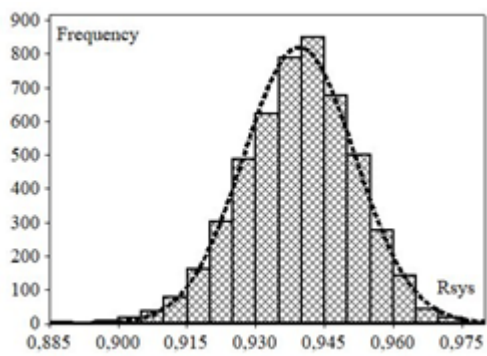
$$R_{WLB} = r_A r_B r_C r_D r_E \quad (11)$$

4.2. A szimuláció futtatása

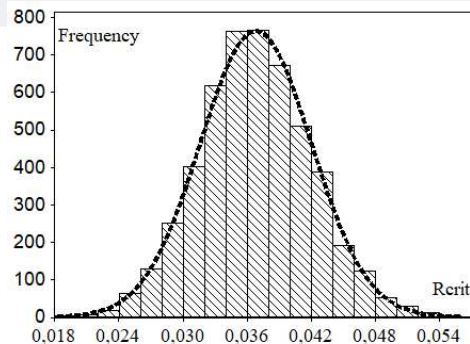
A fentiekben meghatározott üzemmódok megbízhatósága, bekövetkezési valószínűségeit az elemek megbízhatóságainak statisztikai elemzési adatai a 3. Táblázatban találhatók.

3. Táblázat Megbízhatósági adatok statisztikai elemzésének eredményei

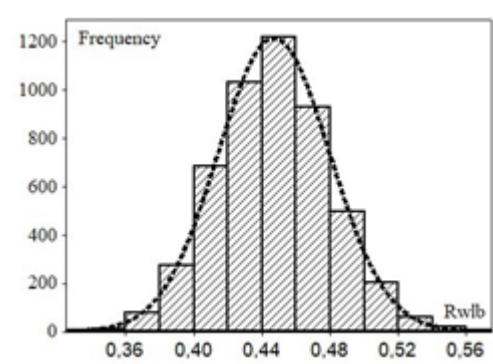
	Minták száma	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
r_A	21	0.85019	0.02004	0.77909	0.92711
r_B	19	0.87051	0.01971	0.79184	0.93369
r_C	25	0.83896	0.03266	0.75260	0.96221
r_D	20	0.83896	0.03266	0.75260	0.96703
r_E	23	0.90988	0.01433	0.86083	0.96510



12. ábra A rendszer megbízhatóságainak hisztogramja

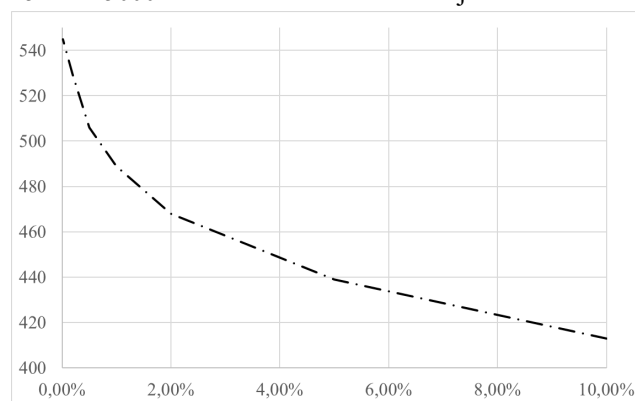


13. ábra Kritikus üzemmód bekövetkezési valószínűségeinek hisztogramja



14. ábra Wheatstone híd típusú rendszer megbízhatóságainak hisztogramja

A kapott eredmények felhasználhatók a szükséges tartalék rendszerek (szenzorok) számának meghatározására – a 3.2 fejezetben leírt módon. Az elemzés eredményeit szemlélteti a 15. ábra 5000 darab működő híd struktúrájú rendszer esetén.



15. ábra A szükséges tartalékberendezés számok 5000 működő berendezésszám esetén

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány bemutatta a Monte-Carlo szimulációt és annak alkalmazási lehetőségét műszaki folyamatok és rendszerek matematikai modellre épülő elemzésére. A Szerző a továbbtudományos munkájának célja a különböző matematikai módszerek alkalmazási lehetőségeinek vizsgálata mérnöki problémák megoldására.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Antal, P., et al. (2014). *Valószínűségi döntéstámogató rendszerek*, TypoTeX, Budapest.
- Bera, J. and Pokorádi, L. (2014) Monte-Carlo Szimuláció alkalmazása a légi közlekedés környezeti hatásainak elemzésére *IFFK 2014: Innováció és fenntartható felszíni közlekedés*. 246-250.
- Bera, J. and Pokorádi, L. (2015). Monte-Carlo Simulation of Helicopter Noise, *Acta Polytechnica Hungarica 12 : 2* 21-32.
- Bronstejn, I. N., Musiol D., Mühlrig H. and Szemengyajev, K. A. *Matematikai kézikönyv* p. 1210, Typotext, Budapest.
- Comte de Buffon, G. (1777). *Essai d'arithmétique morale. Supplément à l'Histoire Naturelle*, 4, Paris: de L'Imprimerie Royale
- Dagpunar, J. S. (2007). *Simulation and Monte Carlo: With applications in finance and MCMC*, John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-85494-5
- Fazekas S., Péter, T., Bede, Zs. (2014). Modell- és validálás, nagyméretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok analíziséhez: Győr – Szent István út és környezetének szimulációs modellje, *IFFK 2014: Innováció és fenntartható felszíni közlekedés*. pp. 77-86.
- Guizani, M., et al. (2010). *Network Modeling and Simulation, A Practical Respective*, p. 281. John Wiley & Sons, Chichester.
- Kalos, M. H. and Whitlock, P. A. (2008). *Monte Carlo Methods*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. Weinheim
- Metropolis, N. and Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method *Journal of the American Statistical Association*, **44** : 247 335-341.
- Nagy, I., Tuloki, Sz., (2018). Fault Analysis and System Modelling in Vehicle Engineering, *Proceedings of the IEEE 18th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI 2018)*, pp. 313 – 317.
- Newman, M.E.J and Barkeman, G.T. (1999). *Monte-Carlo Methods in Statistical Physics*, P 475, Oxford University Press, New York.
- Pokorádi, L. és Molnár, B. (2013) Hidraulikus rendszer parametrikus bizonytalanságának Monte-Carlo szimulációs elemzése, *Műszaki tudomány az északkelet-magyarországi régióban 2013 konferencia előadásai*, pp. 171-180.
- Pokorádi, L. (2016). Availability assessment with Monte-Carlo simulation of maintenance process model, *Polytechnical University of Bucharest. Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering 78 : 3* pp. 43-54.
- Pokorádi, L. (2019a) Models in Safety Management, *Machine Design 11 : 3* 85-94.
- Pokorádi, L. (2019b). Híd-struktúrájú rendszerek megbízhatóságának érzékenységelemzése *IFFK 2019: XIII. Innováció és fenntartható felszíni közlekedés*. Paper: 09.
- Pokorádi, L. (2021). Probabilistic Uncertainty Analysis of Reliability of Systems with Complex Interconnections, *Journal of Physics-Conference Series 1935 : 1*