Járműrendszerek gráf-modell elemzése

Pokorádi László

*Óbudai Egyetem, Mechatronikai és Járműtechnikai Intézet, 1081 Budapest, Népszínház utca 8.
(e-mail: pokoradi.laszlo@bgk.uni-obuda.hu)*

Kivonat: A járműrendszerek vizsgálatának egyik fontos állomása a rendszerelemek és részrendszerek közti – sok esetben bonyolult kölcsönhatásokat is jelenthető – kapcsolatok tényének feltárása és egy gráffal történő reprezentálása. A rendszerelemek közti kapcsolatokat (például jel- vagy anyagáramok) leíró gráf elemzésével meg tudjuk határozni, hogy egy elem melyik más elemekre gyakorol valamilyen szintű hatást. A tanulmány célja egy jól algoritmizálható módszer bemutatása, mellyel a vizsgált rendszer elemei közti kölcsönhatások meghatározhatók és jellemezhetők.

1. BEVEZETÉS

A rendszerelmélet gyakorlati alkalmazásaiban, a megoldás lehetőségének megítélésében a vizsgált rendszer mérete – a rendszerben szereplő elemek száma – az egyik legfontosabb tényező. Ekkor az elemeket „intuitív” értelemben kell definiálnunk (Szabó, 1986).

A diszkrét állapotterű – vagy matematikailag így leírt – technikai (például karbantartási) folyamatok ábrázolása a lehetséges állapotok, és az állapotváltások alkotta gráfok segítségével történhet (Pokorádi, 2002).

Egy integrált vagy komplexkapcsolatú rendszer elemzése során először azt diszkrét gráffal (vagy hálózattal) kell reprezentálni. Ez számos járműtechnikai (például elektromos, hidraulikus, szenzor) rendszer esetén megtehető. Sőt, parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek gráf-modellje is meghatározható (Pokorádi, 2008a).

Egy nagyméretű, lineáris rendszer gráf-reprezentációjának meghatározása után a gráfot jelképes értelemben „fel kell vágni” kisebb részgráfokra, majd a részgráfok egyenleteinek megoldása után az egyes részek megoldásait „össze kell kapcsolni” (ha szükséges, akár több lépésben is), ami az eredeti rendszer megoldásához vezet. A gráf egyrészt fontos állomás az eredeti, teljes rendszer egyenleteinek felállításában, másrészt a vágási eljárás megtervezéséhez nyújt segítséget (Zadeh – Polak, 1972).

A gráfelméletnek és mérnöki alkalmazásának kiterjedt matematikai és műszaki szakirodalma található. A technikai folyamatok leírásához szükséges gráfelméleti alapismeretek olvashatóak a két Korn (1975), Broinstejn (2006) Andrásfalvi (1997) könyvében, valamint Fazekas (1979) egyetemi jegyzetében.

A gráfelmélet, mint matematikai apparátus, műszaki alkalmazására láthatunk példákat a Pokorádi, (1993) és (2008) publikációiban. Csiszér (2011a) és (2011b) kutatásainak célja a hálózatkutatás minőségügyi felhasználási lehetőségeinek feltárása, főleg a folyamatfejlesztési szempontokat helyezve az elemzések középpontjába. Zentai (2017) a kritikus infrastruktúrák hibatűrését, illetve támadásokkal szembeni ellenálló képességét modellezte gráfelméleti eszközökkel, az infrastruktúrát leíró gráf többszörös összefüggőségét vizsgálva.

Péter (2008) tetszőleges méretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok modellezési lehetőségét vizsgálta speciális hálózati gráffal, amelyben a gráf csúcsai általánosított szakaszok, a gráf élei pedig a csúcsok közötti kooperációt leíró dinamikus relációk.

A defektoszkópia egy adott rendszer vagy rendszerelem műszaki állapotának meghatározása, valamely kijelölt vagy megengedett minőségi szinthez történő hasonlítás alapján. Defektószkópiai rendszervizsgálat során a különféle elemek, aggregátok állapotáról csak bináris (jó – hibás) információkat, illetve azok hatásait elemezzük (Pokorádi, 2002).

Jelen tanulmány célja – a fentiekben hivatkozott irodalmak eredményeire építve – a rendszerek defektószkópiai elemzése során alkalmazható – könnyen algoritmizálható – gráfelméleti, mátrixaritmetikai módszer bemutatása.

A cikk az alábbi fejezetekből áll: A 2. fejezetben a gráfelmélet – a későbbi vizsgálat szempontjából fontos – (matematikai) alapfogalmait ismertetjük. A 3. fejezetben a rendszerek elérhetőségi mátrixai meghatározásának egy, a Szerző által kidolgozott mátrixaritmetikai eljárását mutatjuk be. A 4. fejezet egy esettanulmányon, a Mi-8 Hip helikopter féklevegő rendszerének vizsgálatán, keresztül szemlélteti a módszer alkalmazását. Végezetül, az 5. fejezetben összegzi munkáját a Szerző, majd jövőbeni kutatási terveit ismerteti.

2. GRÁFELMÉLETI ALAPOK

A gráf olyan alakzat, amely pontokból és bizonyos pontpárokat összekötő (nem feltétlenül egyenes) vonaldarabokból áll. Matematikai megfogalmazásban a $G(P;E;f)$ gráfon olyan alakzatot értünk, amely a P pontokból és bizonyos pontokat összekötő E vonaldarabokból áll. A P halmaz elemeit pontoknak (esetleg gráf szögpontjainak vagy csúcsainak), az E halmaz elemeit pedig a gráf éleinek nevezzük (Andrásfalvi, 1997). A fenti jelölésben szereplő f függvény az E halmazt képezi le a $P \times P$-re, azaz bármely e élhez hozzárendel egy pontpárt a P halmaz elemei közül. Ezért f-t illeszkedési leképezésnek is nevezzük (Fazekas, 1979).

Online: ISBN 978-963-88875-3-5
CD: ISBN 978-963-88875-2-8
Editor: Dr. Péter Tamás

Irányított gráfról akkor beszélünk, ha az élek végpontjainak sorrendjére is tekintettel vagyunk. Ha nem determinált az élek végpontjainak sorrendje, a gráfot irányítatlannak nevezzük.
A gráfokat általában grafikusan ábrázoljuk – lásd a későbbi esettanulmányt szemléltető 3. ábrát. Egy másik ábrázolási, leírási mód a belőlük képezhető különböző mátrixok alkalmazása.
A gráf szögpontjai közti kapcsolatokat az úgynevezett csúcs- (szomszédossági-, vagy adjacencia-) mátrixszal lehet táblázatosan megadni.
Irányított gráf esetén az **A** mátrix i-edik sor j-edik elemének a_{ij} értéke a p_i szögpontból induló és a p_j végpontú élek számát jelöli.
Az irányítatlan gráf – $\mathbf{A} = [a_{ij}]$-vel jelölt – szomszédossági mátrixa i-edik sor j-edik elemének a_{ij} értéke jelöli a p_i és a p_j szögpontokat közvetlenül összekötő élek számát.
Könnyen belátható, hogy irányítatlan gráf esetén az adjacencia-mátrix mindig szimmetrikus, míg irányított gráfnak a szomszédossági mátrixa aszimmetrikus is lehet.
A (főleg nem elméleti matematikai) szakirodalom egy köre nem a fentiekben leírt definíciókat használja. A rendszerek és folyamatok modellezése szempontjából a legfontosabb kérdés a rendszer elemei, a technikai folyamat állomásai, állapotai közti kapcsolat létének feltárása. Ezért azt nem szükséges vizsgálnunk, hogy a szomszédos pontok (rendszerelemek, műszaki folyamatállapotok) között vannak-e többszörös élek és hurok élek, mint azt majd a következő fejezetben tapasztalhatjuk. Így a továbbiakban az alábbi definíciókat fogjuk alkalmazni:
Az irányítatlan gráf **A**-val jelölt szomszédossági mátrixa i-edik sor j-edik elemének értéke 1, ha a két szögpontot közvetlenül összeköti a gráf valamely éle, illetve 0, ha nem. Matematikailag felírva:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan él, amelynek két végpontja } p_i \text{ és } p_j \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} . \quad (1)$$

Irányított gráf esetén az **A** mátrix a_{ij} eleme pedig

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van } p_i\text{-böl induló és } p_j\text{-be vezető él} \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} . \quad (2)$$

3. AZ ELÉRHETŐSÉGI MÁTRIX MEGHATÁROZÁSA

Az elemek közti összetett kapcsolatokat a rendszer gráfmodelljének az úgynevezett elérhetőségi mátrixa jellemzi.
Egy m szögpontból álló gráf elérhetőségi mátrixán azt az m sorból és oszlopból álló $\mathbf{Z}_{m\times m} = [z_{ij}]$ négyzetes mátrixot értjük, ahol:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p_i\text{-csúcsból a } p_j \text{ szögpont elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} . \quad (3)$$

Egy adott rendszer vagy diszkrét állapotterű folyamat gráfelméleti vizsgálatánál az egyik fő feladat az elérhetőségi mátrix létrehozása – azaz az elérhetőség, hatásgyakorlás tényének egzakt meghatározása. Ez a mátrix egy adott rendszer esetén például azt mutatja meg, hogy az egyik (az i-edik) elem anomáliája hatással van-e a másik (j-edik) elem működésére. Valamely folyamat vizsgálata során pedig megadja azt, hogy mely állapotokból lehet mely állapotokba eljutni.
A Fazekas (1979) meghatározása szerint az elérhetőségi mátrixot a szomszédossági mátrix hatványai segítségével tudjuk felállítani. Ehhez a mátrixszorzás szabályainak megfelelően határozzuk meg az $m \times m$ méretű **A** adjacencia mátrix $\mathbf{A}_2$ jelű négyzetmátrixának elemeit az:

$$a_{ij}^{[2]} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} a_{sj} \quad (4)$$

egyenlettel.
A korábbi definíciókat felhasználva kijelenthetjük, hogy

$$a_{is} a_{sj} = 0 \quad ,$$

ha nem tudunk egy lépésben eljutni az i-edik szögpontból az s-edikbe (azaz, ha $a_{is} = 0$), vagy ha az s-edikből a j-edikbe (vagyis, ha $a_{sj} = 0$).
Ha egy-egy lépésben el tudunk jutni p_i-ből p_s-be és p_s-ből p_j-be, azaz, ha $a_{is} = a_{sj} = 1$, akkor

$$a_{is} a_{sj} = 1 \quad .$$

Így, a (4) egyenlettel meghatározott érték – a fenti szorzatok összegzése következtében – azt adja meg, hogy a gráf i-edik szögpontjából hány különböző úton tudunk két lépéssel eljutni a j-edik szögpontba.
Fontos itt megjegyezni, hogy jelen tanulmányban az utak különbözőségén az általuk érintett szögpontok, vagy azok sorrendjének különbözőségét értjük. Az ugyanazon szögpontokat megegyező sorrendben tartalmazó, de más élekből álló utakat azonosaknak tekintjük. Ilyen eset fordulhat elő, ha a gráfon belül két szögpontot egynél több él köt össze. Ezt az egyszerűsítő feltételt azért vezetjük be, mert végső célunk az elérhetőség vagy el nem érhetőség tényének megállapítása a tényleges utak egymástól függetlenül. Vizsgálatunk fő célja a gráfok szögpontjai közt meglévő kapcsolatok feltárása.
Könnyen belátható az **A** szomszédossági mátrix $\mathbf{A}_k$-val jelölt

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}^k \quad (5)$$

k-adik hatványmátrixának elemei azt mutatják meg, hogy k lépésben az i-edik szögpontból a j-edikbe hány egymástól – a fenti értelmezés szerint – független úton lehet eljutni
A hatványmátrixok

$$\mathbf{H}_k = \sum_{n=1}^{k} \mathbf{A}^n \quad (6)$$

összegezésével kapott $\mathbf{H}_k$ összegmátrix elemei azt adják meg, hogy legfeljebb k lépésben az i-edik szögpontból a j-edikbe hány – egymástól független – úton lehet eljutni.
Képezzünk a $\mathbf{H}_k$ mátrixokból $\mathbf{S}_k$ jelű mátrixot az alábbi függvény szerint:

$$\mathbf{S}_k = \text{sign}\ \ \mathbf{H}_k \qquad s_{ij}^{[k]} = \text{sign}\ h_{ij}^{[k]}, \tag{7}$$

ahol:

$$\text{sign}\,\eta = \begin{cases} 1, & ha\ \eta > 0 \\ 0, & ha\ \eta = 0\,, \\ -1, & ha\ \eta < 0 \end{cases} \tag{8}$$

és nevezzük el ezeket a $\mathbf{H}_k$ mátrix szignum mátrixának, melynek elemei azt adják meg, hogy legfeljebb k lépésben a gráf p_i szögpontjából el lehet-e jutni a j-edik szögpontjába – a (3) egyenlettel megadott elérhetőségi mátrixszal analóg módon – azaz:

$$s_{ij}^{[k]} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p_i\text{-csúcsból a } p_j \text{ szögpont maximum } k \text{ lépésben elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \tag{9}$$

Egy m szögpontból álló gráfban a leghosszabb lehetséges élsorozat maximum m élből állhat, mely – a kiindulási és a vég szögpont kivételével – minden hozzá tartozó szögpontot csak egyszer érint – azaz a lehetséges leghosszabb kör, vagy pálya.
Ha

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{N} \quad , \tag{10}$$

ahol $\mathbf{N}$ a zéró (null) mátrix, a gráf leghosszabb útjának hossza $k\text{-}1$, azaz a gráfban nem található k-hosszúságú, valamint annál hosszabb út.
Ha

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{J} \quad , \tag{11}$$

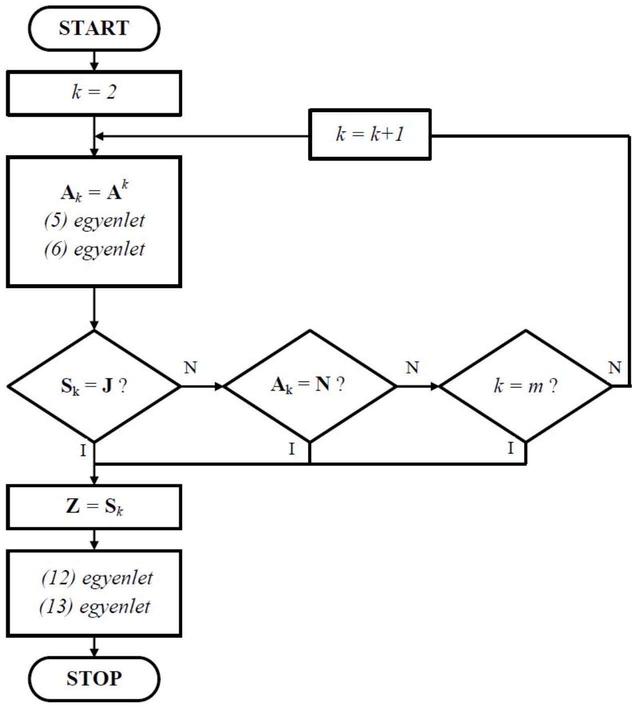
ahol $\mathbf{J}$ az úgynevezett csupa-egyes mátrix, akkor a gráf minden szögpontja elérhető mindegyik szögpontból.
A fenti három feltétel figyelembevételével határozható meg az elérhetőségi meghatározásának folyamata, amit az 1. ábrán látható folyamatábra szemléltet, kiegészítve az alábbi elemzésekkel.
Az elérhetőségi mátrix ismeretében az

$$\mathbf{e} = \left[e_k\right] \quad e_k = \sum_{j=1}^{m} z_{jk} \tag{12}$$

kitettség vektor, illetve az

$$\mathbf{i} = \left[i_k\right] \quad i_k = \sum_{j=1}^{m} z_{kj} \tag{13}$$

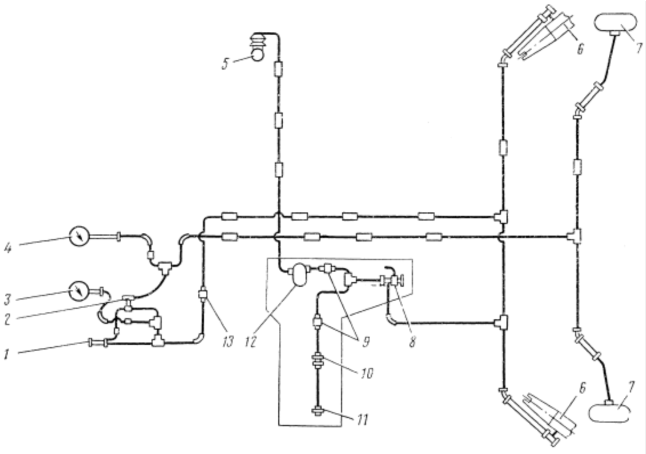
hatásvektor meghatározható.
Az $\mathbf{e}$ kitettség vektor azt mutatja meg, hogy a rendszer mely elemére hat a többi elem közül a legtöbb. Azaz az adott szögpont (értsd rendszerelem, vagy folyamatállapot) milyen mértékben érzékeny, kitett a többi rendszerelemben, vagy folyamatállapotban fellépő esetleges meghibásodásra, problémára.
Az $\mathbf{i}$ hatás vektor azt szemlélteti, hogy az adott rendszerelem meghibásodása mennyi más rendszerelem működésére hat.



1. ábra A gráf-modell elemzés folyamatábrája
(forrás: Szerző)

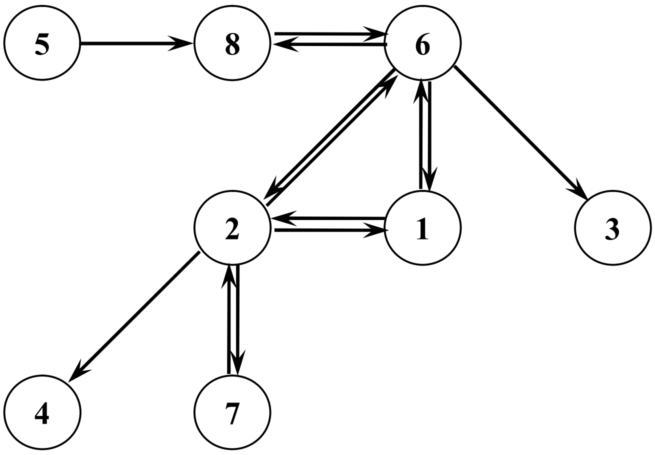
4. ESETTANULMÁNY

A fentiekben általánosan leírt módszer szemléltetése érdekében határozzuk meg a 2. ábrán látható MI-8 Hip helikopter féklevegő rendszer elérhetőségi mátrixát a rendszer állandósult (befékezett) állapotát vizsgálva.
A működés elemzése során megállapítható, hogy a 10, 12 és 13 jelű elemek passzívaknak tekinthetők. A különféle szűrök nem játszanak szerepet a rendszer állandósult üzemállapotai során, még a 11 jelű fedélzeti feltöltő csonknak szerepe csak a rendszer karbantartása, előkészítése során van. A kettő darab 9 jelű visszacsapó szelep is passzívnak tekinthető. De, mivel azok meghatározzák az adott csőszakaszban a sűrített levegő áramlásának irányát, így a rendszer működését leíró gráfot „irányítottá teszik". A fenti megfontolások, és a részegységek működésének elemzése alapján tudjuk felvenni a rendszer irányított gráfját, amit a 3. ábra szemléltet.



2. ábra Mi-8 Hip helikopter levegőrendszerének elvi rajza (Данилов, 1988)

1– vezérlő berendezés; 2 – redukciós gyorsító; 3;4 – nyomásmérők; 5 – légsűrítő; 6 – levegőtartályok; 7 – fékberendezések; 8 – nyomásautomata; 9 – visszacsapó szelep; 10;13 – levegőszűrők; 11 – feltöltő csonk; 12 – ülepítő szűrő.



3. ábra A vizsgált rendszer gráfja (forrás: Szerző)

A (2) egyenlet alapján felírt szomszédossági mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

A fenti **A** mátrixból kiindulva, az (5); (6), valamint a (9) egyenletek felhasználásával a vizsgált gráf elérhetőségi mátrixa:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

A vizsgált rendszer kitettség vektora:

$$\mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

illetve hatás vektora:

$$\mathbf{i}^T = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

A gráf-modell vizsgálat eredményei alapján az alábbi szakmai következtetések vonhatóak le – hangsúlyozottan a rendszer állandósult befékezett állapota esetén:

- az **e** kitettség vektor megmutatja, hogy az 5 légsűrítő működésére nincs hatással a rendszer többi elemének esetleges meghibásodása, mivel $e_5 = 0$ – lásd (16) egyenlet;
- a rendszer többi elemének kitettsége azonos – lásd (16) egyenlet;
- az **i** hatásvektor alapján kijelenthető, hogy a 3 és 4 nyomásmérő műszer esetleges üzemzavara nincs hatással a rendszer többi elemének működésére, mivel $i_3 = i_4 = 0$ – lásd (17) egyenlet;
- a többi rendszerelem esetleges meghibásodása azonos számú más rendszerelem működésére van hatással – lásd (17) egyenlet.

Természetesen, egy összetettebb rendszer – tehát bonyolultabb gráf-modell – esetén a fenti bekezdésben tett megállapítások belátása könnyen nem lehetséges, így az ismertetett módszer alkalmazása szükségessé válik.

5. ÖSSZEGZÉS

Jelen tanulmány egy jól algoritmizálható, egy rendszer gráfmodelljére épülő mátrixalgebrai módszert mutatott be, mel--lyel a vizsgált rendszer elemei közti kölcsönhatások ténye meghatározhatók és minősíthetők.

A kidolgozott és egy esettanulmányon keresztül bemutatott modellezési eljárás felhasználható a korszerű járművekben alkalmazott szenzorrendszer-hálózatok feltérképezésére, majd megbízhatóság-, és biztonságszempontú elemezésére. Például, ez utóbbi problémakört vizsgálja a (Tuloki – Nagy 2018) publikáció is.

A Szerző további kutatásainak célja a jelen tanulmányban bemutatott gráf-modellezési eljárás továbbfejlesztése komplexkapcsolatú technikai rendszere, és azon belül – főleg Nagy és Tuloki munkáira támaszkodva, velük együttműködve – gépjármű szenzorhálózatainak megbízhatósági elemzésére.

KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A kutatást a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával megvalósuló EFOP-3.6.2-16-2017- 00016: „Autonóm járművek dinamikája és irányítása az automatizált közlekedési rendszerek követelményeinek szinergiájában” projekt támogatta.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Andrásfalvi, B. (1997). Gráfelmélet, Polygon, Szeged.

Broinstejn, I. N., Szemengyajev, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. (2006). Matematikai kézikönyv, Typotex, Budapest.

Csiszér, T. (2011a). A hálózatkutatás alkalmazása a folyamatalapú minőségfejlesztésben, *Minőség és megbízhatóság*, **2011/5**, pp. 274-282.

Csiszér, T. (2011b). A kockázati események közötti összefüggések vizsgálata hálózatelemzése, *Magyar Minőség* **11**, 59-61.

Данилов, B.A. (1988). Вертолет Ми–8, Транспорт, Москва, 1988, pp. 278.

Fazekas, F. (1979) Alkalmazott matematika II., egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.

Korn, G.A., Korn, T.M. (1975). Mathematical Handbook for *Scientists* and Engineers, Courier Dover Publications.

Péter, T. (2008). Tetszőleges méretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok modellezése speciális hálózati gráffal, amelyben a gráf csúcsai általánosított szakaszok, a gráf élei a csúcsok közötti kooperálót leíró dinamikus relációk, A jövő járműve, 3. 26-29.

Pokorádi, L. (1993). Rendszerek és folyamatok gráfelméleti vizsgálata, *Tudományos Kiképzési Közlemények*, **2-3**, 33–44.

Pokorádi, L. (2002). Karbantartás elmélet, DE MFK, Debrecen.

Pokorádi, L. (2008a). Rendszerek és folyamatok modellezése, Campus Kiadó, Debrecen.

Pokorádi, L. (2008b). Rendszerek gráfmodellezése. *GÉP* **LIX**. 59-62.

Szabó, I. (1986). Gépészeti rendszertechnika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986., pp. 541.

Tuloki, Sz., Nagy, I. (2018). Elektromos gépjárművek szenzorhálózatának feltérképezése és biztonsági elemzése, *Műszaki Tudományos Közlemények*. **9**. 243-247.

Zadeh, L.A., Polak, E. (1972) Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Zentai, D. (2017). Gráfelméleti módszerek a kritikus infrastruktúra védelemben, *Hadmérnök*, **2**. 341-347.