

Elektromos DC motorral hajtott kerekes járművek szabályozásának új adaptív megoldásai *

Tar József¹, Kósi Krisztián², Haidegger Tamás³

¹Bejczy Antal iRobottechnikai Központ (e-mail: jozsef.tar@irob.uni-obuda.hu).

²Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola (e-mail: kosi.krisztian@phd.uni-obuda.hu).

³Bejczy Antal iRobottechnikai Központ (e-mail: tamas.haidegger@irob.uni-obuda.hu).

Óbudai Egyetem, H-1034 Budapest, Bécsi út 96/B (www.uni-obuda.hu).

Kivonat: A cikk a „Robusztus Fixpont Transzformáció” (RFPT) alapuló adaptív szabályozási eljárás egy új alkalmazásán, passzív támasztókerékkel ellátott, két DC motor hajtású aktív kerékkel mozgatott kerekes mobil robot – „Wheeled Mobile Robot” (WMR)– szabályozásában való alkalmazását vizsgálja olyan körülmények közt, midőn a rendszer dinamikai modellje nem pontosan ismert.

E feladat kinematikai és dinamikai szempontból is izgalmas. A kinematikai problémák abból fakadnak, hogy a két hajtómotorral egyszerre három mennyiséget, az (x, y) síkon vett helyet és a θ orientációt szeretnénk szabályozni. Emellett ki kell még elégíteni az anholonom kényszerfeltételeket is, azaz a síkon nem történhet csúszás, ha a kerekek megfelelő mértékben tapadnak.

A dinamikai nehézségek a pontatlan modellből eredő formális tulajdonságokból erednek. Míg precíz dinamikai modell esetén szétcsatolt, „Linear Time-Invariant” (LTI) (állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet rendszer) jellegű egyenletek írhatók fel a koci tömegközéppontjának translációs gyorsulására és e tömegközéppont körüli szöggyorsulására egy inerciális vonatkoztatási rendszerhez képest, a tömegközéppont koordinátái ismeretének hiányában általában csak csatolt nemlineáris egyenletrendszerekre számíthatunk.

További nehézség a mechanikai és az elektrodinamikai alrendszerek (a DC motorok) mozgásegyenleteinek csatolódása. A koci mozgásának szabályozásához a Klasszikus Mechanika által megengedett leggyorsabb módszer a hajtónyomatékok bármely pillanatban történő tetszőleges beállítását igényelné. E nyomatékok arányosak a motorárammal, ami viszont a tekercsek induktivitása miatt a szabályozó feszültség pillanatnyi változtatásával nem írható elő: csupán a motoráram idő szerinti deriváltját tudjuk bármely pillanatban tetszőlegesen beállítani. A mechanikai részrendszerre nézve ez harmadrendű mozgásegyenletekre vezetne, amelynek megvalósítása gyakorlatilag nem okvetlenül előnyös. Így a gyakorlat számára szükségessé vált valamilyen rendcsökkentési eljárás bevezetése nemlineáris rendszerekre.

Szimulációs vizsgálatokkal mutatjuk meg, hogy az RFPT alapú adaptív szabályozó segítségével a fenti problémák összessége egyszerre sikeresen kezelhető.

Kulcsszavak: Robusztus Fixpont Transzformáció, Adaptív Szabályozás, Rendcsökkentés Nemlineáris Rendszerekre, Kerekes Mobil Robot, Anholonom Kényszerek

*Köszönetünket fejezzük ki a TÁMOP-4.2.2.C. „Smarter Transport” és a TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0012: „Hibrid és elektromos járművek fejlesztését megalapozó kutatások” projektek támogatóinak – A projektek a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósulnak meg.

1. Bevezetés

Az LTI rendszerekre jól kiforrott, gyakorlatilag „uniformizált” szabályozótervezési módszerek állnak rendelkezésünkre. A cél többnyire megfelelő visszacsatolási tényezők beállítása, amelyek úgy stabilizálják a szabályozott rendszert, hogy az precízen tudja követni az előírt mozgáspályát. Annak általános igénye, hogy ezeken a már „lefejtett síneken” haladjunk tovább, szülte meg az LTI rendszerek különböző általánosításait, amelyek bizonyos vonatkozásaikban többé-kevésbé hasonlítanak az LTI rendszerekre mint a „*Linear Parameter Varying*” (LPV) –lineáris, nem állandó együtthatójú differenciálegyenletekkel leírható rendszerek–, a „*Quasi-Linear Parameter Varying*” (QLPV) –kvázilineáris változó paraméterű rendszerek–, s végül a nemlineáris rendszerek igen tág osztálya.

Mivel a nemlineáris rendszerek mozgásegyenletei általában nem rendelkeznek „zárt alakú analitikus megoldással”, a különböző szabályozótervezési módszerek – miközben igyekeznek kihasználni a megfelelő kategória sajátosságait is – általában Lyapunov 2. vagy „direkt” módszerén alapulnak, amely 1892 környékén lett kifejlesztve nemlineáris rendszerek stabilitásának vizsgálatához [1, 2]. E módszer lényege, hogy a létrejövő mozgás részletei ismeretének hiányában is annak egy igen fontos tulajdonságát, nevezetesen a stabilitását viszonylag egyszerű becslések alapján garantálni tudja. (E célra többféle, gyakorlatilag jól használható stabilitási definíció is forgalomban van.)

Minden erénye ellenére e módszer rendelkezik néhány – szintén a gyakorlati alkalmazások szempontjából tekintve – hátrányos tulajdonsággal is:

1. konkrét használata nehéz feladat, nagyon jó matematikai készségekkel rendelkező, innovatív tervezőt kíván, és nem oldható meg a szokásos napi mérnöki rutin alapján;
2. általában *elégleges feltételek* kielégítését követeli meg, tehát az esetek többségében vélhetően sokkal több feltétel teljesülését igényli, mint a valóban szükséges feltételek lennének;
3. a tervezés folyamán nem vesz figyelembe és nem is fed fel finom részleteket a létrejövő mozgásról, melyek egyébként az elsődleges tervezői szándékban megjelenhetnek;
4. a módszerrel nyert megoldások nagyszámú önkényes szabályozó paramétert tartalmaz-

hatnak, melyek beállítása a tényleges gyakorlati igények jobb kielégítése érdekében további lépéseket igényel, gyakran evolúciós számítási módszerek igénybevételével (pl. [3, 4]).

A fenti nehézségek ellenére a XX. század kilencvenes éveinek elejétől fogva e módszert sikeresen alkalmazták a legtöbb szabályozótervezési feladat megoldására (pl. [5, 6, 7]).

Az elsődleges tervezői szándékok, azaz a megvalósuló mozgás kinematikai részletei előírásának igénye vezetett alternatív tervezési módszerek keresésére. Az RFPT alapú tervezést 2009-ben javasoltuk erre a célra [8]. E megközelítés a pályakövetés kinematikailag előírt részletei pontos realizálására egy véges vonzási medencén belül. A módszer később egyetlen adaptív szabályozó paraméter olyan hangolásával lett kiegészítve, amely egy rendszermodellől teljesen független megfigyelő alapján működik, ezáltal tartva a rendszert a konvergenciatartomány belsejében [9]. Ily módon az versenyképessé volt tehető a Lyapunov függvényen alapuló tervezési módszerekkel, amelyek általában globális stabilitást garantálnak. Megjegyzendő, hogy sok esetben ez a kiegészítő paraméterhangolás szükségtelen.

Az elektromos DC motorokkal hajtott, két aktív és egy passzív támasztókerékkel rendelkező robotkocsik mozgásának szabályozásával intenzíven foglalkoztak az elmúlt években (pl. [10, 11, 12]). E megközelítések Lyapunov 2. módszerét használták és általában komplikált matematikai részleteken alapulnak. A jelenközlemény célja annak bemutatása, hogy az RFPT alapú adaptív szabályozótervezési módszerrel lehetséges az ilyen járművek olyan adaptív szabályozása, amelyek a robotkocsi egy kinematikai szempontból kényelmesen megválasztható pontjának pályakövetését, illetve a kocsit e pont körüli forgó mozgásának követését teszi lehetővé. E pontnak nem kell egybeesnie a (kocsi+mozgatott teher rendszer) tömegközéppontjával, amely esetben a mechanikai alrendszerre szétcsatolt LTI jellegű egyenleteket szolgáltató modell lehetne kapni. Ha a követett pont nem a tömegközéppont, általában csatolt, nemlineáris differenciálegyenletek rendszerét kapjuk a mechanikai részrendszer mozgására. Megmutatjuk továbbá azt is, hogy e feladatot az RFPT alapú módszer a szabályozás rendjének 3-ról 2-re való csökkentésével tudja megoldani. Ezzel lépéseket tettünk egy általános rendcsökkentési módszer kidolgozására nemlineáris rendszerek esetén, amire ismereteink szerint az irodalom-

ban nem sok példa található.

2. Nemlineáris rendcsökkentési módszer adaptív szabályozókhoz közelítő dinamikai modell alapján

Magasabb rendű szabályozási feladatok a gyakorlatban gyakran fordulnak elő, midőn különböző mechanikai részrendszerek egymáshoz deformálható elemeken keresztül vannak csatolva. Például ha egy tömegpont mozgását úgy tudjuk szabályozni, hogy az egy rugalmas szállal kapcsolódik egy pontszerű merev testhez, amelyet közvetlenül tudunk vizsgálni, egy negyedrendű szabályozási feladattal állunk szemben: a szabályozandó pont koordinátáinak 2. idő szerinti deriváltja áll kapcsolatban a reá ható erővel, melyek a rugalmas szál aktuális hosszától függenek. E hossz idő szerinti 2. deriváltját tudjuk viszont előírni a közvetlenül mozgatott merev testre pillanatnyilag ható erők beállításával, következésképp a hatóerők a szabályozandó mennyiség 4. idő szerinti deriváltjával állnak közvetlen kapcsolatban [13].

Ha egy mechanikai rendszert egyenáramú, állandó mágneset használó motorral hajtunk meg, annak megfelelő gyorsításához konkrét forgatónyomaték érték szükséges. E forgatónyomaték arányos a motor pillanatnyi áramával, ami a tekercsek induktivitása miatt nem állítható be tetszőleges értékre az adott pillanatban a szabályozó feszültség beállításával: e pillanatnyi feszültség érték csupán a motor áramának idő szerinti deriváltját tudja pillanatnyilag beállítani, így a mechanikai rendszer precíz szabályozása szigorú értelemben véve harmadrendű szabályozási feladat lenne. Ennek elkerülésére valamilyen „rendcsökkentő” eljárásra lenne szükségünk.

Valamilyen rendcsökkentési módszer alkalmazása a gyakorlatban elkerülhetetlen, ha nagyméretű rendszerekre kívánunk valamilyen gyakorlati célokra is felhasználható közelítő modellt létrehozni [14], mivel az egzakt modellrend igen nagy, gyakorlatilag kezelhetetlen lenne. Az összes rendelkezésre álló, LTI rendszerekre kidolgozott módszer alapötlete igen egyszerű: az időkép alkalmazása helyett ezek a rendszerek leírhatók a frekvenciaképben ún. „átviteli függvények” használatával. E függvények általában polinomok hányadosaiból

állnak, melyek hatásai a a pólusoktól mentes, és a \mathbb{C} komplex sík végtelenjében nagyon gyorsan (bármilyen véges hatvány reciprokánál gyorsabban) zérushoz konvergáló Fourier transzformálttal rendelkező ún. „Gyorsan Fogyó Alapfüggvények” vagy más néven a \mathcal{D} függvényosztályba tartozó függvényekre a „Reziduum tétel” segítségével igen egyszerűen számítható ki. E függvények Fourier transzformáltjainak sehol sincs pólusuk, ezért az inverz Fourier transzformációval a $-\infty$ -ből induló, a $+\infty$ -ben végződő, és az átviteli függvény pólusait a kauzalitás elve szerint megkerülő, és a felső félsíkon hurokká zárható vonalmenti integrálással képződő eredményben az átviteli függvény nevezőjében a hurkon belül lévő polinomok zérushelyeinél kell venni a reziduum értékeket. Ezeket mintegy „súlyozzák” a számlálóban lévő polinom értékei [15, 16]. (E gyorsan fogyó alapfüggvények az időképből véges tartójú, végtelen sokszor folytonosan differenciálható valós jeleknek felelnek meg, és igen alkalmasak a fizikai valóság sokrétű modellezésére, pl. [17].)

A gyorsan fogyó alapfüggvények frekvenciaképből gyors fogyásuk miatt mondhatjuk, hogy a gyakorlatban az átviteli függvény viselkedése lényegében csak abban a frekvenciatartományban érdekes, amelyen a gerjesztő függvénynek is jelentős értéke van. Ebből ered az ötlet, hogy a figyelemre érdemes frekvenciatartományban két magas fokszámú polinom hányadosát érdemes lehet két alacsonyabb fokszámú polinom hányadosával közelíteni.

A függvényközelítések egyik lehetséges megválasztásának alapötlete Padé 1892-es doktori értekezéséből származik [18]. Köztudomású, hogy egy véges fokszámú polinom a ∞ -ben mindig divergál. Emiatt, ha van egy Taylor sorunk, annak konvergencia tartománya határának környékén nagyon sok tagot kell figyelembe venni, ha pontos közelítést akarunk, kiváltképp akkor, ha ez a tartomány „tág”. Emiatt a „végesre vágott Taylor sor” közelítés tág tartományon gyakorlatilag kényelmetlen megoldás lehet. E nehézség kiküszöbölésére Padé „racionális függvényeket”, azaz olyan polinomok hányadosait javasolta, amelyekben a számláló fokszáma alacsonyabb, mint a nevezőé. Ezek a közelítések legalább nem divergálnak abban a tartományban, ahol egyébként már rosszul közelítenek, ezért szabályozástechnikai alkalmazásuk is kényelmesebb lehet a véges fokszámú Taylor sorok használatánál. Az alapötlet igen egyszerű: a közelítendő és a közelítő függvényeket Taylor sorba fejtjük az érdekes frekvenciatartomány közepénél elhe-

lyezkedő pont körül, és megköveteljük, hogy bizonyos rendig egyezzenek meg egymással a sorfejtések együtthatói (az ún. „*momentum illesztés módszere*” vagy „*Moment Matching*” [14], [19]). A módszert igen kiterjedten alkalmazták, erről egy átfogó tanulmánynak felel meg [20]. A módszer törtrendű rendszerek terén is jól használható (pl. [21]).

Visszatérve az LTI rendszerekre, az (1)-ben megfogalmazott rendszerre az $x(t_0) = x_0$ kezdeti érték feladatára $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, és $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ x(t) &= \exp(A(t - t_0))x_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t - \xi))Bu(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (1)$$

E feladat megoldásában a szabályozó jeltől függő rész az exponenciális függvény hatványsorában a Cayley-Hamilton tétel értelmében az $\exp(A(t - \xi))B$ a lineárisan független elemek csak a $\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$ vektorok közül kerülhetnek ki (stabil rendszer esetében a kezdeti feltételtől függő $\exp(A(t - t_0))x_0$ tag nullához konvergál, ezért különösebb jelentősége hosszabb időtávon nincs). E halmazt Kyrov bázisnak is nevezik, s ezek a bázisvektorok feszítik ki a szabályozó jellel elérhető állapotok halmazát mint a lehetséges állapotok terének egy alterét. A Padé módszer alkalmazásához ezeknek a vektoroknak a momentumokhoz fűződő kapcsolatát kell tisztázni. Lánczos Kornél dolgozott ki egy olyan algoritmust, amely e bázisvektoroknál e célra kényelmesebben használható bázisra vezet [22], majd egy éven belül W.E. Arnoldi adott egy ugyanezen eredményre vezető, de stabilabb algoritmust ugyanerre a feladatra [23]. Az alapötlet, hogy ebből az altérből lehet magasabb rendű deriváltaknak megfelelő részeket projektor operátorral „kihagyni”, és egy kisebb dimenziószámú al térre koncentrálni. A rendszer megfigyelhetőségével ugyanez tehető: le lehet mondani bizonyos alterek megfigyeléséről.

A nemlineáris rendszerek esetén az egyik technika a *linearizálás módszere* [14], ami egy rendszer egyensúlyi pontja körüli korlátozott mozgásának tárgyalására alkalmas: az egyensúlyi pont körül veszi a nemlineáris modell lineáris közelítését és arra alkalmazza az előbb tárgyalt módszert. A módszer javítható magasabb rendű tagok figyelembevételével (pl. [24, 25]). Általában elmondható, hogy a kurrens módszerek alapvetően a lineáris technikák „továbbvitelén” alapulnak (pl. „*Proper Orthogonal Decomposition*” (POD) [26], vagy egyéb technikák, amelyek a nemlinearitások

izolálására törekednek és azok környékén a lineáris részek redukálására [27, 28]).

Az általunk ajánlott megközelítés szakít a lineáris szabályozáselemlétekből és a frekvenciakép használatából álló hagyományokkal és a feladat megoldásához egészen más irányból közelít. Feltételezzük, hogy az elektrodinamikai részrendszer működése lényegesen gyorsabb, mint a mechanikai részrendszeré. Ekkor realizisztikus közelítésnek tűnik, hogy a digitális szabályozó ciklusain belül konstans nyomatékokat próbálunk kifejteni, ezek tehát lépcsőfüggvényként változnak a ciklusok között. Egy cikluson belül pedig az elektromos részrendszer által megvalósított nyomaték gyorsan „felfut” vagy „lefut” a szabályozó által előírt érték környékére és azon belül közel konstans lehet. Ennek lehetőségét az elektromos részrendszer stabilitása, az ohmikus ellenállások disszipatív jellege garantálja, mint általában a passzív rendszerek szabályozásában ez lehetséges a „*Passivity Control*” megoldásokban [29, 30]. Természetesen ez csak egy közelítés. Az alapötlet az RFPT alapú adaptív szabályozó használata, amely e közelítési hiba következményeit az egyéb közelítések és esetleg figyelembe nem vett külső zavarok következményeivel együtt a szabályozó jel adaptív deformálásával próbálja meg kompenzálni anélkül, hogy bármi erőfeszítést investálna a rendelkezésre álló közelítő modell alapján várható, és a ténylegesen megfigyelhető rendszerválasz közti eltérés okának identifikálására és valamilyen modell-paraméter ennek megfelelő hangolására, javítására.

A következőkben a kerekes mobil robotkocsik szabályozásának közvetlen előzményeire koncentrálnunk.

3. A kerekes mobil robotkocsik szabályozásának közvetlen előzményei

Az elmúlt években intenzíven tanulmányozták a robotkocsik modell-alapú szabályozásának feladatát. E kocsik speciális változata két aktívan hajtott keréssel és egy harmadik, passzív támasztókerékkel működik, amely a kocsik platóját az (x, y) síkban tartja. A szabályozástechnikai irodalomban „forgalomban lévő” legnépszerűbb modellek a robotkocsik tömegközéppontjának inerciarendszerhez képesti gyorsulására valamint az e pont körüli forgásának szöggyorsulására vonatkozó egyenleteket használják azzal a hallgatólagos fel-

tevéssel, hogy ez a pont egybeesik egy, a kocsis mozgásának követésére kinematikai szempontból is kényelmes pontjával (pl. [10, 31, 11, 12]). Ezáltal a mozgásegyenleteknek a mechanikai rendszerre vonatkozó része LTI jellegű, csatolatlan egyenletek formájában jelenik meg, amelyekbe azonnal „beépíthetők” a kocsisíkon való rendes tapadásához tartozó anholonom mozgás kinematikai kényszerei is.

Meg kell jegyezzük, hogy bizonytalan modellel rendelkező rendszerek mozgásegyenleteire (pl. egy platóján többé-kevésbé határozatlanul elhelyezett terhet cipelő robotkocsi+teher együttese mint merev test) esetén ez az elvi lehetőség nem áll fent: semmi nem garantálja, hogy a tömegközéppont egybeesik a kinematikailag kényelmesen követhető mozgású ponttal, valamint azt sem tudhatjuk előre, hogy a tömegközéppont hol van. Ebben az esetben az „általános” mozgásegyenletek használatára kényszerülünk a dinamikai szabályozás kiépítése esetében, amelyek immár nem szétcsatolt LTI jellegűek, hanem erősen csatolt nemlineáris közönséges differenciálegyenletek lesznek, bizonytalanul ismert paraméterekkel. Ezen mozgásegyenletekbe kell ezután beépíteni az anholonom mozgás kinematikai kényszereit, továbbá leírni a mechanikai és elektromágneses hajtások mozgásegyenleteivel való csatolódást. E csatolás azonnal megnöveli a szabályozási feladat rendjét: míg a Klasszikus Mechanika elvileg módot adna másodrendű differenciálegyenletek használatára, ha a szükséges szabályozó nyomatékok pillanatszerűen lennének módosíthatók, az elektromos hajtások a motortekercsek induktivitása miatt csak ennek a nyomatéknak az idő szerinti első deriváltját képesek azonnal beállítani a szabályozó feszültséggel. Emiatt a mechanikai részrendszerre szigorúan véve csak harmadrendű mozgásegyenletek használatára tudunk szorítkozni. Ha ezeket el kívánjuk kerülni, valamilyen rendcsökkentési eljárásra szorulunk.

Talán történelmi okokból a szabályozáselmélettel foglalkozó közösség erősen kötődik a hagyományos lineáris szabályozási módszerek „továbbviteléhez”, illetve azok általánosítására törekszik. Ennek első lépése az eredeti LTI rendszerek több lépéses általánosítása az LPV majd a QLPV rendszerosztályok bevezetésével. Például, ha megbízható modellünk van (akár analitikus formában, akár valamilyen lágy számítási eljáráshoz illő formában megadva), e modellek a „Tenzorszorzat” –*Tensor Product (TP)*– formára áttranszformálhatók numerikus algoritmusok segítségével. E formára már kidol-

gozhatók az állapottól többdimenziós hasábokra („*Polytop*”) való osztásával olyan visszacsatolási tényezők, amelyek egy hasábon belül állandók, és meghatározásuk –szintén numerikusan– lineáris mátrix-egyenlőtlenségek megoldásával történhet, amihez kiváló MATLAB csomagok állnak rendelkezésre (pl. [32, 33]). Ha viszont a rendelkezésre álló modell nem pontosan ismert, erre a procedúrára nem építhetünk. Az erősen nemlineáris, azaz egy „munkapont” körül kielégítően nem linearizálható rendszerek szabályozására általában Lyapunov 2. vagy „direkt” módszere alapján terveznek szabályozókat [1, 2]. Például 1993-ban C. Samson egy ilyen megoldást adott kocsijellegű mobil robotok mozgásszabályozására.

2002-ben Oriolo, De Luca és Vendittelli javasolt egy visszacsatolás-linearizálási („*Feedback Linearization*”) technikát kerekes robotkocsi mozgásszabályozására [10]. Cikkükben R.W. Brockett klasszikus eredményére [31] hivatkozva hangsúlyozták, hogy e robotkocsi egy adott pont körüli egyensúlyi helyzetben való tartásához nem létezik folytonos szabályozójeleket alkalmazó linearizált modell. E feladathoz vagy nem folytonos, vagy időben változó visszacsatolás alkalmazása szükséges.

2008-ban S. LeBel és L. Rodrigues páronként változó, affin, változó paraméterű szabályozást javasolt robotkocsik mozgásszabályozására [11]. Különböző közelítések stabilitását vizsgálták a Lyapunov technika alkalmazásával.

2013-ban V.M. Ojleska kapcsolt fuzzy és fuzzy-neurális rendszert alkalmazott szabályozó tervezésére [12]. A tervezésben Lyapunov függvény technikát alkalmazott, ami komplikált megfontolásokra vezetett. Megközelítésében a következő kinematikai modellt használta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{r_w}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \cos \theta, \\ \dot{y} &= \frac{r_w}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{r_w}{2D} (\dot{q}_r - \dot{q}_l), \end{aligned} \quad (2)$$

melyben r_w az aktív kerekek sugarát, D a kerekek kocsiközépponttól vett (szimmetrikus) távolságát jelöli, míg q_r és q_l rendre a jobb és bal oldali kerekek elfordulási szöge, θ pedig a kocsisíkon vett orientációját jelenti. A második idő szerinti deriváltakra ez az alábbi következményekkel jár:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{r_w}{2} (\ddot{q}_r + \ddot{q}_l) \cos \theta - \frac{r_w}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \sin \theta \dot{\theta}, \\ \ddot{y} &= \frac{r_w}{2} (\ddot{q}_r + \ddot{q}_l) \sin \theta + \frac{r_w}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \cos \theta \dot{\theta}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{r_w}{2D} (\ddot{q}_r - \ddot{q}_l). \end{aligned} \quad (3)$$

A dinamikai modellt a Klasszikus Mechanika alapján közvetlenül állították fel: a

tömegközéppont gyorsulása az inerciálisnak vett, talajhoz kötött koordináta rendszer mértékeiben arányos a kocsiira ható összes erővel és a kocsi M össztömegével, a körülötte való forgás szöggyorsulása pedig a kocsi e pontra vonatkoztatott Ξ tehetetlenségi nyomatékától és az arra vonatkoztatott forgatónyomatékoktól függ. E forgatónyomatékok a kerekek hajtásai által kifejtett T_r és T_l forgatónyomatékaitól függenek:

$$\begin{pmatrix} T_r \\ T_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Mr_w^2}{4} + \frac{\Xi r_w^2}{4D^2} & \frac{Mr_w^2}{4} - \frac{\Xi r_w^2}{4D^2} \\ \frac{Mr_w^2}{4} - \frac{\Xi r_w^2}{4D^2} & \frac{Mr_w^2}{4} + \frac{\Xi r_w^2}{4D^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_l \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Világos, hogy a (4) dinamikai modell LTI jellegű, és annak használata a $q_r^N(t)$, $q_l^N(t)$ formában adott nominális pálya követésére nem jelentene nehézséget. A fennálló nehézségek tisztán kinematikai jellegűek, mivel a nominális pálya nem a kerekek szögelfordulására adott, hanem a síkon való mozgásra a $\theta^N(t)$, $x^N(t)$, és $y^N(t)$ formában. Ez három, egymástól független mennyiség szabályozását jelentené, melyhez *aluhajtott rendszerünkben* mindössze két szabályozó jelünk lenne, a T_r és T_l keréknyomatékok, továbbá a (2) és (3) kinematikai kényszerekre is figyelemmel kell lennünk. A helyzetet csak tovább bonyolítja, hogy ha a szabályozott mozgású pont nem esik egybe a kocsi tömegközéppontjával. Ezért a következő szakaszban módszeresen felépítjük az általános dinamikai modellt.

4. Az általános dinamikai modell

Itt külön tekintjük a mechanikai és az elektrodinamikai részeket.

4.1. A mechanikai rész modellezése

Az általános mozgásegyenletek közvetlenül Newton törvényeiből származtathatók a „transzlációs momentum” (impulzus) és a „rotációs momentum” (impulzusnyomaték) inerciális rendszerben való felírásával majd idő szerinti deriváltjának képzésével, az előforduló tagokban azonosítva a newtoni mechanika szerint fizikailag értelmezhető tagokat.

Vezessük be a kocsi „kezdeti pozícióját”, melyben a gondolatban elemi tömegpontokra darabolt jármű $m^{(i)}$ tömegű i . tömegpontja a $\hat{r}^{(i)}$ koordinátájú pontban helyezkedik el (ezek mind *konstans* mennyiségek). A kocsi *merev test közelítésében* az összes ilyen egyedi pont elmozdulása leírható az origó körüli elforgatással (ezt a $O(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonális mátrix írja le), majd egy innen történő eltolással, amit az $R(t) \in \mathbb{R}^3$ vektor ír le, melyekben a t változó jelöli az időt:

$$\begin{aligned} r^{(i)}(t) &= O(t)\hat{r}^{(i)} + R(t), \\ \dot{r}^{(i)}(t) &= \dot{O}(t)\hat{r}^{(i)} + \dot{R}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Mivel az ortogonális transzformációk *Lie csoportot* alkotnak, a $G \stackrel{def}{=} \dot{O}(t)O^{-1}(t)$ mátrix e csoport egyik *generátora*, mellyel $\dot{O} = GO$ formában írható fel, és fizikailag vagy geometriailag úgy értelmezhető, mint az adott pont körüli forgás pillanatnyi szögsebessége. Ennek felhasználásával (5) a következőképp írható át:

$$\begin{aligned} \dot{r}^{(i)}(t) &= \dot{O}(t)O^{-1}(t)O(t)\hat{r}^{(i)} + \dot{R}(t) \implies \\ \dot{r}^{(i)}(t) &= G(t)O(t)\hat{r}^{(i)} + \dot{R}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

mivel a pillanatnyi szögsebesség $G(t)$ használható fel szabályozási célokra. Ezen előkészítés után a pillanatnyi impulzus a következőképp definiálható:

$$\begin{aligned} P &\stackrel{def}{=} \sum_i m^{(i)}\dot{r}^{(i)} = G(t)O(t)M\hat{S} + M\dot{R}(t), \\ &\text{ahol} \\ M &\stackrel{def}{=} \sum_i m^{(i)}, \text{ és} \\ \hat{S} &\stackrel{def}{=} \frac{\sum_i m^{(i)}\hat{r}^{(i)}}{M}, \end{aligned} \quad (7)$$

melyben bevezettük a *rendszer teljes tömegét* M , és a *tömegközéppont helyét a kiindulási pozícióban* \hat{S} (Nyilvánvalóan M és \hat{S} is állandó mennyiségek.)

A kocsi teljes impulzusnyomatéka az egyes tömegpontok impulzusnyomatékainak összegként definiálható mint

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\stackrel{def}{=} \sum_i m^{(i)} \left[\dot{r}^{(i)} [r^{(i)} - R(t)]^T \right. \\ &\quad \left. - [r^{(i)} - R(t)] \dot{r}^{(i)T} \right] = \\ &= \sum_i m^{(i)} \left[\dot{r}^{(i)} \hat{r}^{(i)T} O^T - O \hat{r}^{(i)} \dot{r}^{(i)T} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

amely a pillanatnyi $R(t)$ pont körüli forgást írja le. (A \mathcal{M} jelölést szándékosan alkalmaztuk azért, hogy világos különbséget tegyünk az össztömeg és az impulzusnyomaték közt.) Ebbe az egyenletben $\dot{r}^{(i)}$ a $G(t)$, $O(t)$ és $\dot{R}(t)$ mennyiségekkel mint fizikailag világosan értelmezett mennyiségekkel fejezhető ki:

$$\mathcal{M} = \sum_i m^{(i)} \left[G O \hat{r}^{(i)} \hat{r}^{(i)T} O^T + \dot{R} \hat{r}^{(i)T} O^T - O \hat{r}^{(i)} \hat{r}^{(i)T} O^T G^T - O \hat{r}^{(i)} \dot{R}^T \right]. \quad (9)$$

Világos, hogy (9)-ben azonosítható a konstans $M\hat{S}$ vektor, és az egyenlet szinte sugallja egy másik állandó mennyiség, a „*tehetetlenségi nyomaték*” bevezetését mint

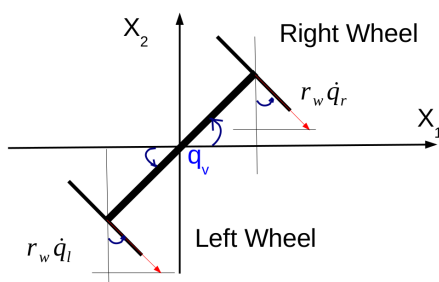
$$\hat{\Theta} \stackrel{def}{=} \sum_i m^{(i)} \hat{r}^{(i)} \hat{r}^{(i)T}, \quad (10)$$

ami egy *szimmetrikus mátrix*. E mennyiségek segítségével (9) átírható a

$$\mathcal{M} = G O \hat{\Theta} O^T - O \hat{\Theta} O^T G^T + \hat{R} M \hat{S}^T O^T - O M \hat{S} \hat{R}^T \quad (11)$$

formába.

A további komplikáltabb részletek kidolgozásától itt elegendő hely hiányában eltekintünk, és csak a végeredményt közöljük. E bevezetés bőven elegendő volt annak indoklására, hogy azokban miért fordulnak elő a konstans M , \hat{S} , $\hat{\Theta}$ mennyiségek, és azok időtől függő, transzformált változatai, azaz az $S(t) \stackrel{def}{=} O(t)\hat{S}$, and $\Theta(t) \stackrel{def}{=} O(t)\hat{\Theta}O^T(t)$ mennyiségek. (A számításokban a forgáscsoport speciális tulajdonságát, azaz azt, hogy $O^{-1} \equiv O^T$, a $\Theta(t)$ mátrix szimmetriáját, és a G mátrix antiszimmetriáját is kihasználtuk.) A további matematikai részletek szintén függenek a forgáscsoport alkalmazott paraméterezésétől és a kocsike-rekek elfordulásának leírására használt *előjele választási konvenciótól* (1. ábra).



1. ábra: Az anholonom kocsi modell kinematikai vázlata

Az \hat{x}_3 tengely körüli elfordulást az $O(q_v)$ ortogonális mátrix írja le, melyet a $\hat{G}^{(0)}$ generátor generál ($\theta \equiv q_v$):

$$O(q_v) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \cos q_v & -\sin q_v & 0 \\ \sin q_v & \cos q_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\hat{G}^{(0)} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E művelet lehetséges, mert az a kocsit a talaj síkjával párhuzamosan hagyja. Ezzel

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \sin q_v \\ \dot{R}_2 &= -r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \cos q_v \\ \dot{q}_v &= -\frac{r_w}{D} \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

A kinematikailag megengedhető 2. deriváltak a csúszástól mentes speciális esetben (13)-ból származtathatók a következőképp:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1 &= r_w \frac{\ddot{q}_r + \ddot{q}_l}{2} \sin q_v + r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \cos q_v \dot{q}_v \\ \ddot{R}_2 &= -r_w \frac{\ddot{q}_r + \ddot{q}_l}{2} \cos q_v + r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \sin q_v \dot{q}_v \\ \ddot{q}_v &= -\frac{r_w}{D} \frac{\ddot{q}_r - \ddot{q}_l}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

A dinamikai mozgásegyenletekre vonatkozóan észrevehető, hogy a forgatás szempontjából a külső erők és a kontakt kényszererők az x_1 és x_2 tengelyek körül képesek kioltani egymást, valamint az erőkre nézve az, hogy az x_3 irányban történő mozgásra nézve a kényszererők bizonyos határok között kiolthatják egymás hatását. Emiatt elegendő az (x, y) síkon történő mozgásra, és az x_3 tengely körüli forgásra koncentrálni. Ha nem hatnak horizontális külső erők, a (15) mozgásegyenletre jutunk, amelyekben a számunkra érdekes kontakt erők merőlegesek a kerekek tengelyére, és közvetlen kapcsolatban állnak a kerekek hajtásának nyomatékaival. A teljes rendszer mozgásegyenletei a \dot{P} mennyiség (7)-ben és a \dot{M} mennyiség (8)-ban adott képzéséből származtathatók, melyekben a $F^{(i)} \stackrel{def}{=} m^{(i)} \hat{r}^{(i)}$ töredékek természetesen jelennek meg, és úgy értelmezhetők, mint az i . tömegpontra ható összes erő összege.

$$H \begin{pmatrix} \ddot{q}_r - \ddot{q}_l \\ \ddot{q}_r + \ddot{q}_l \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} D(T_1 - T_r) \\ r_w(T_1 + T_r) \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} H_{11} &\stackrel{def}{=} \frac{r_w}{2D} (\Theta_{11} + \Theta_{22}), \\ H_{12} &\stackrel{def}{=} \frac{Mr_w}{2} (S_2 \sin q_v + S_1 \cos q_v), \\ H_{21} &\stackrel{def}{=} \frac{Mr_w}{2D} (S_2 \sin q_v + S_1 \cos q_v), \\ H_{22} &\stackrel{def}{=} \frac{Mr_w}{2}, \\ B_1 &= \frac{Mr_w}{2} (\dot{q}_r + \dot{q}_l) \dot{q}_v \times \\ &\quad (S_2 \cos q_v - S_1 \sin q_v), \\ B_2 &= M \dot{q}_v^2 (S_2 \cos q_v - S_1 \sin q_v). \end{aligned} \quad (15)$$

A következő feladat e mechanikai modell „összedolgozása” az elektromágneses részrendszer modelljével.

4.2. Az állandó mágnesű DC motor modellje és az egyesített modell

Feltesszük, hogy mindkét kereket azonos tulajdonságokkal rendelkező motor hajtja meg. Ezek modelljét [34]-ből vettük az alábbi paraméterekkel:

$$\dot{Q}_e = \frac{-RQ_e - K^2\dot{q} + KU}{L} \quad (16)$$

ahol

- q motortengely elfordulási szögét,
- Q_e a motortengelyre ható elektromágneses eredetű forgatónyomatékát,
- R a motor tekercsének ohmikus ellenállását,
- L annak inductivitását,
- K a motor nyomaték-együtthatóját,
- U pedig a pillanatnyi szabályozó feszültséget jelenti.

E modellt kell kiegészíteni a motor mechanikai részének Θ^{Mot} tehetetlenségi nyomatékával és a tengely-súrlódás b viszkózus súrlódási együtthatójával, valamint a motor- és a kocsitengelyek közti áttétel $\nu \in (0, 1)$ értékével. Ehhez először célszerű a (15) egyenletet átrendezni úgy, hogy közvetlenül kapjuk meg \ddot{q}_r , \ddot{q}_l , valamint T_r és T_l kapcsolatát, amely egyenlethez már hozzáadhatjuk a motorok járulékait is. Az eredmény:

$$\left[\frac{\Theta^{\text{Mot}}}{\nu} I + \frac{-\nu r_w^2}{2D} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_w} & -\frac{D}{r_w} \\ -\frac{1}{r_w} & -\frac{D}{r_w} \end{pmatrix} \tilde{H} \right] \times \begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_l \end{pmatrix} + \frac{b}{\nu} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_l \end{pmatrix} + \frac{-\nu r_w^2}{2D} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_w} & -\frac{D}{r_w} \\ -\frac{1}{r_w} & -\frac{D}{r_w} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} Q_r^{\text{eMot}} \\ Q_l^{\text{eMot}} \end{pmatrix}, \text{ ahol} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{11} &= \frac{r_w}{2D} (\Theta_{11} + \Theta_{22}) + \frac{M_{r_w}}{2} (S_2 s q_v + S_1 c q_v), \\ \tilde{H}_{12} &= -\frac{r_w}{2D} (\Theta_{11} + \Theta_{22}) + \frac{M_{r_w}}{2} (S_2 s q_v + S_1 c q_v), \\ \tilde{H}_{21} &= \frac{M_{r_w}}{2D} (S_2 s q_v + S_1 c q_v) + \frac{M_{r_w}}{2}, \\ \tilde{H}_{22} &= \frac{M_{r_w}}{2} - \frac{M_{r_w}}{2D} \times (S_2 s q_v + S_1 c q_v) \end{aligned}$$

és az egyenleteken belül a $c q_v \stackrel{def}{=} \cos q_v$ és az $s q_v \stackrel{def}{=} \sin q_v$ rövidített jelöléseket alkalmaztuk, és $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ pedig az egységmátrixot jelöli.

Az (17) és (4) egyenletek összevetéséből rögtön kiviláglik a jelentős mértékű komplexitás-növekedés. Még ha szimmetria okokból (a síkon sem az x , sem az y irány nincs „kitüntetve”) a $(\Theta_{11} + \Theta_{22})$ összeg konstans is marad, akárcsak Ξ , ha $\dot{S} \neq 0$ (és következésképp $S \neq 0$), (17) nem marad LTI jellegű: a \tilde{H} mátrix elemei függni fognak a q_v forgáshelyzettől, és a (15)-ben definiált B tömbben a $\sin q_v$ ill. $\cos q_v$ jellegű nemlinearitásokon túl a \dot{q}_r és \dot{q}_l szögsebességekben kvadratikus tagok is megjelennek. Emiatt az (17) egyenlettel leírható rendszerre nem olyan egyszerű szabályozót tervezni, mint a (4) mozgásegyenletű rendszerre. Az előforduló erős nemlinearitások vagy Lyapunov direkt módszerének használatát, vagy annak valamilyen alternatíváját igényelnék. A későbbiekben a saját fejlesztésű RFPT alapú adaptív szabályozót szeretnénk kifejleszteni, ami szétválasztja egymástól a pályakövetés kinematikai és dinamikai részleteit. Ezért a következő fejezetben célszerű a kinematikai kényszerek által megengedett, elvileg lehetséges kívánt pályakövetési stratégiákkal foglalkozni, utána rátérhetünk az adaptív dinamikai mozgásszabályozás részleteire.

5. A kinematikai kényszerek által megengedett lehetséges pályakövetési stratégiák

Tegyük fel, hogy adott egy nominális pálya a $\xi^N \stackrel{def}{=} (q_v^N(t), R_1^N(t), R_2^N(t))^T$ koordinátákkal megadva, amelyet a lehető legpontosabban kell a szabályozónak követnie. Egy tisztán kinematikailag megtervezett, PID típusú hibarelaaxálás lehet például az alábbi stratégia: legyen $\mathbb{R} \ni \Lambda > 0$, és

$$\begin{aligned} h(t) &\stackrel{def}{=} \xi^N(t) - \xi(t), \\ h_{\text{int}}(t) &\stackrel{def}{=} \int_{t_0}^t (\xi^N(\zeta) - \xi(\zeta)) d\zeta, \\ \left(\frac{d}{dt} + \Lambda\right)^3 h_{\text{int}}(t) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ahol $\xi \stackrel{def}{=} (q_v(t), R_1(t), R_2(t))^T$. Az ötlet azon alapszik, hogy a $\left(\frac{d}{dt} + \Lambda\right) f(t) \equiv 0$ differenciálegyenlet adott kezdeti értékhez tartozó megoldása 0-hoz tart időben: $f(t) = f(t_0) \exp(-\Lambda(t - t_0)) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. A

egyenlet (18) a dinamikai szabályozó által megvalósítandó, alábbi „kívánt” 2. deriváltra vezet:

$$\ddot{\xi}^{\text{Des}}(t) = \Lambda^3 h_{\text{int}}(t) + 3\Lambda^2 h(t) + 3\Lambda \dot{h}(t) + \ddot{\xi}^{\text{N}}(t) . \quad (19)$$

Ha PD-típusú pályakövetésre vágyunk, hasonló megfontolásokat tehetünk a $(\Lambda + \frac{d}{dt})^2 (\xi^{\text{N}}(t) - \xi(t)) \equiv 0$ előírásával, ami az (20)-ban adott visszacsatolásra és kívánt 2. deriváltra vezet:

$$\ddot{\xi}^{\text{Des}}(t) = 2\Lambda^2 h(t) + 2\Lambda \dot{h}(t) + \ddot{\xi}^{\text{N}}(t) . \quad (20)$$

A csúszást megakadályozó anholonom kényszerfeltételek mellett a (19) vagy (20) egyenletekben adott 2. deriváltak általában nem valósíthatók meg. Ebből problémák adódhatnak, ha pl. a hibaintegrálban folyamatosan „felhízik” valami maradék, ami nem kompenzálható ki, ettől a követés akár divergálhat is. Ennek elkerülése érdekében meg lehet próbálni a hibaintegrál korlátozásával az alábbi módon („vágott PID”, $w > 0$):

$$\ddot{\xi}^{\text{Des}}(t) = \Lambda^3 w \tanh\left(\frac{h_{\text{int}}(t)}{w}\right) + 3\Lambda^2 h(t) + 3\Lambda \dot{h}(t) + \ddot{\xi}^{\text{N}}(t) . \quad (21)$$

Ha ennek ellenére marad „divergáló maradék”, meg lehet próbálni a kis maradék hiba arányosnál gyorsabb relaxálásával, pl. az alábbi, pozitív hiba-komponensekre megoldott egyenlettel

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\alpha \text{sign}(h) |h|^{\beta_{\text{kin}}} , \\ h(t) &= [h(0)^{1-\beta_{\text{kin}}} - \alpha(1-\beta_{\text{kin}})t]^{\frac{1}{1-\beta_{\text{kin}}}} , \\ \alpha > 0 \text{ és } \beta_{\text{kin}} &\in (0, 1), h \geq 0, t \geq 0 , \end{aligned} \quad (22)$$

ahol a véges kezdeti hiba véges idő alatt nullázódna, ezért neveztük „mohó” hiba-relaxálásnak. Mivel ez az érték kisebb hibára az arányosnál gyorsabban, nagyobb hibára pedig az arányosnál lassabban relaxál, érdemes a kettő keverésével, egy „egyensúlyozó” $b_{\text{bal}} \in (0, 1)$ paramétert bevezetni, és ezzel módosítani a PID illetve a PD jellegű relaxáció megfelelő tagjait:

$$\ddot{\xi}^{\text{Des}}(t) = \Lambda^3 w \tanh\left(\frac{h_{\text{int}}(t)}{w}\right) + 3\Lambda^2 [b_{\text{bal}} h(t) + (1 - b_{\text{bal}}) \text{sign}(h) |h(t)|^{\beta_{\text{kin}}}] + 3\Lambda \dot{h}(t) + \ddot{\xi}^{\text{N}}(t) , \quad (23)$$

illetve

$$\ddot{\xi}^{\text{Des}}(t) = 2\Lambda^2 [b_{\text{bal}} h(t) + (1 - b_{\text{bal}}) \text{sign}(h) |h(t)|^{\beta_{\text{kin}}}] + 2\Lambda \dot{h}(t) + \ddot{\xi}^{\text{N}}(t) . \quad (24)$$

amitől azt várhatjuk, hogy kis és nagy hibára is elég gyorsan relaxál, ha arra a kinematikai kényszerek módot adnak.

További lehetőség lehet az eredeti nominális pálya kis szinuszos „modulációja”. Az Ackermann-típusú kormányszerkezettel bíró járművek jellegzetessége, hogy az elmozdulás és az orientáció hasonló módon csatolva változtatható. Szűk helyre való leparkolásnál vagy onnan való kiállásnál előbb az orientációt kell „iteratív módon” beállítani, s csak ezután lehet érdemben elmozdulni. E szinuszos moduláció hasonló lehetőséget kínál a pozíció és orientáció közötti „megköthető alku” kialakítására.

Egy egyszerű lehetőség a megfelelő kompromisszum kiválasztására a 3 követendő komponens hibája valamilyen súlyozott négyzetösszegének időpontenkénti minimalizálása \ddot{q}_r és \ddot{q}_l szerint úgy, hogy ebben már csak a kinematikai kényszerek által megengedett elmozdulások vannak beépítve (14) szerint:

$$\begin{aligned} \Phi(\ddot{q}_r, \ddot{q}_l) &:= \kappa_1 [\ddot{\xi}_1(t) - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t)]^2 + \\ &\kappa_2 [\ddot{\xi}_2(t) - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t)]^2 + \\ &\kappa_3 [\ddot{\xi}_3(t) - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t)]^2 \end{aligned} \quad (25)$$

ahol a $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 > 0$ pozitív súlyok rendre az orientációs hiba, az x és az y koordináta követési hibájának relatív súlyozását jelentené. A $\kappa_2 \neq \kappa_3$ eset nem izotrop súlyozásnak felelne meg a síkon. Ez a minimum könnyen megtalálható, mivel

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}_r} = \\ 2\kappa_1 &\left[\ddot{\xi}_1(t) - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t) \right] \frac{\partial \ddot{\xi}_1}{\partial \ddot{q}_r} + \\ 2\kappa_2 &\left[\ddot{\xi}_2(t) - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t) \right] \frac{\partial \ddot{\xi}_2}{\partial \ddot{q}_r} + \\ 2\kappa_3 &\left[\ddot{\xi}_3(t) - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t) \right] \frac{\partial \ddot{\xi}_3}{\partial \ddot{q}_r} , \\ 0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}_l} = \\ 2\kappa_1 &\left[\ddot{\xi}_1(t) - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t) \right] \frac{\partial \ddot{\xi}_1}{\partial \ddot{q}_l} + \\ 2\kappa_2 &\left[\ddot{\xi}_2(t) - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t) \right] \frac{\partial \ddot{\xi}_2}{\partial \ddot{q}_l} + \\ 2\kappa_3 &\left[\ddot{\xi}_3(t) - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t) \right] \frac{\partial \ddot{\xi}_3}{\partial \ddot{q}_l} \end{aligned} \quad (26)$$

melyben (14) szerint



$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_r} &= \frac{\partial \dot{q}_v}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{r_w}{2D}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{q}_r} &= \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial \dot{q}_r} = \frac{r_w \sin q_v}{2}, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{q}_r} &= \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{r_w \cos q_v}{2}, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{\partial \dot{q}_v}{\partial \dot{q}_l} = \frac{r_w}{2D}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial \dot{q}_l} = \frac{r_w \sin q_v}{2}, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial \dot{q}_l} = -\frac{r_w \cos q_v}{2},\end{aligned}\quad (27)$$

azaz

$$\begin{aligned}0 &= -\kappa_1 \left[\ddot{\xi}_1(t) - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w}{2D} + \\ &\quad \kappa_2 \left[\ddot{\xi}_2(t) - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \sin q_v}{2} \\ &\quad - \kappa_3 \left[\ddot{\xi}_3(t) - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \cos q_v}{2} \\ 0 &= \kappa_1 \left[\ddot{\xi}_1(t) - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w}{2D} + \\ &\quad \kappa_2 \left[\ddot{\xi}_2(t) - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \sin q_v}{2} \\ &\quad - \kappa_3 \left[\ddot{\xi}_3(t) - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \cos q_v}{2}.\end{aligned}\quad (28)$$

Továbbá (14) szerint ezek a kifejezések lineárisak \dot{q}_r -ben és \dot{q}_l -ben, tehát a megoldások egyszerűen kinyerhetők mint:

$$\begin{aligned}0 &= -\kappa_1 \left[-\frac{r_w}{D} \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2} - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w}{2D} + \\ &\quad \kappa_2 \left[r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \sin q_v + r_w \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2} \cos q_v \dot{q}_v \right. \\ &\quad \left. - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \sin q_v}{2} \\ -\kappa_3 &\left[-r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \cos q_v + r_w \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2} \sin q_v \dot{q}_v \right. \\ &\quad \left. - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \cos q_v}{2}, \\ 0 &= \kappa_1 \left[-\frac{r_w}{D} \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2} - \ddot{\xi}_1^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w}{2D} + \\ &\quad \kappa_2 \left[r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \sin q_v + r_w \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2} \cos q_v \dot{q}_v \right. \\ &\quad \left. - \ddot{\xi}_2^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \sin q_v}{2} \\ -\kappa_3 &\left[-r_w \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} \cos q_v + r_w \frac{\dot{q}_r - \dot{q}_l}{2} \sin q_v \dot{q}_v \right. \\ &\quad \left. - \ddot{\xi}_3^{\text{Des}}(t) \right] \frac{r_w \cos q_v}{2}.\end{aligned}\quad (29)$$

Ez a lineáris egyenletrendszer könnyen megoldható $\dot{q}_- \stackrel{def}{=} (\dot{q}_r - \dot{q}_l)$ -re és $\dot{q}_+ \stackrel{def}{=} (\dot{q}_r + \dot{q}_l)$ -re (30)-ban. A két egyenlet egymással való összeadásával kapjuk, hogy

$$\frac{2(\kappa_2 \ddot{\xi}_2^{\text{Des}} s q_v - \kappa_3 \ddot{\xi}_3^{\text{Des}} c q_v + (\kappa_3 - \kappa_2) r_w^2 \frac{\dot{q}_r + \dot{q}_l}{2} c q_v s q_v \dot{q}_v)}{r_w^2 (\kappa_2 s q_v^2 + \kappa_3 c q_v^2)} \ddot{q}_+^{\text{Des}} = \quad (31)$$

A 2. egyenletet az 1.-ből kivonva kapjuk, hogy

$$\ddot{q}_-^{\text{Des}} = -\frac{2D^2}{\kappa_1 r_w^2} \frac{\kappa_1 r_w}{D} \ddot{\xi}_1^{\text{Des}} = -\frac{2D}{r_w} \ddot{\xi}_1^{\text{Des}} \quad (32)$$

amiből az következik, hogy

$$\begin{aligned}\ddot{q}_r^{\text{Des}} &= \frac{\ddot{q}_+^{\text{Des}} + \ddot{q}_-^{\text{Des}}}{2}, \text{ és} \\ \ddot{q}_l^{\text{Des}} &= \frac{\ddot{q}_+^{\text{Des}} - \ddot{q}_-^{\text{Des}}}{2}.\end{aligned}\quad (33)$$

Érdekes, hogy κ_1 kiesik a számításokból, de κ_2 és κ_3 megmaradnak az egyenletekben.

Fizikai (szimmetria) megfontolások alapján hajlamosak lehetnének ragaszkodni a $\kappa_2 = \kappa_3$ előíráshoz. Két aktív keréssel hajtott kocs esetében ez az idea azonban nem okvetlenül célszerű. Ennek magyarázatára tekintünk az 2. ábrát és a (14) kényszeregyenletet! Ha $q_v = 0$ vagy $q_v = \pi$ \dot{q}_r és \dot{q}_l nincs hatással \dot{R}_1 -re. Hasonló módon, midőn $q_v = \pm \frac{\pi}{2}$, \dot{q}_r és \dot{q}_l nem hat \dot{R}_2 -re. E speciális pontok környékén a kinematikailag előírt \dot{R}_1^{Des} vagy \dot{R}_2^{Des} értékek csak kismértékben befolyásolják a \dot{q}_+ megoldás értékét. E hatások szintén jól követhetők az (31) egyenletben is, ami fizikailag jól értelmezhető és kihasználható az alábbi egyszerű módon: ha egy hatás nagyon kicsi, azaz pl. nincs módunk lényegesen módosítani mondjuk \ddot{x} értékét, hanyagoljuk el a rá vonatkozó előírást, és zavar nélkül módosítsuk \ddot{y} értékét, ami ekkor módunkban áll. Ez a stratégia jól megvalósítható a *dinamikusan változó* $\kappa_2 \stackrel{def}{=} \kappa_{20} (1 - \cos^2 q_v)$ és $\kappa_3 \stackrel{def}{=} \kappa_{30} (1 - \sin^2 q_v)$ paraméterekkel. A $\kappa_{20} = \kappa_{30}$ választás szimmetria okokból megint ésszerű lehet. A szimulációs vizsgálatokban ezzel a választással éltünk. Mielőtt a szimulációs eredmények bemutatására rátérnénk, röviden összefoglaljuk az RFPT alapú adaptivitás alapjait.

6. Az adaptív dinamikai szabályozó matematikai alapjai

Az n . ciklusban a kinematikailag meghatározott „kívánt” $\ddot{\xi}^{\text{Des}}(n)$ gyorsulások helyett először meghatározzuk az azok kinematikailag lehetséges legjobb közelítéséhez tartozó $\ddot{q}_r^{\text{DesR}}(n)$ és $\ddot{q}_l^{\text{DesR}}(n)$ értékeket. A következő lépésben a [8] referenciában leírtak szerint vesszük ennek adaptív deformáltját (34) szerint, s azt behelyettesítjük a rendelkezésre álló dinamikai modellel, hogy a kifejtendő szabályozófeszültségeket meghatározzuk. A szabályozó az n . ciklusban ezeket a konstans értékeket fejti ki, miközben megfigyeli a rendszer ezekre adott válaszát. A következő ciklusban már ez a válasz is fel lesz használva a megfelelő adaptív deformáció kialakítására:

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa_1 r_w^2}{4D^2} & \frac{r_w^2 (\kappa_2 \sin^2 q_v + \kappa_3 \cos^2 q_v)}{4} \\ -\frac{\kappa_1 r_w^2}{4D^2} & \frac{r_w^2 (\kappa_2 \sin^2 q_v + \kappa_3 \cos^2 q_v)}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_- \\ \ddot{q}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 \dot{\xi}_1^{\text{Des}} \frac{r_w}{2D} + \kappa_2 \dot{\xi}_2^{\text{Des}} \frac{r_w \sin q_v}{2} - \kappa_3 \dot{\xi}_3^{\text{Des}} \frac{r_w \cos q_v}{2} + (\kappa_3 - \kappa_2) r_w^2 \frac{\dot{q}_+ + \dot{q}_-}{4} \cos q_v \sin q_v \dot{q}_v \\ \kappa_1 \dot{\xi}_1^{\text{Des}} \frac{r_w}{2D} + \kappa_2 \dot{\xi}_2^{\text{Des}} \frac{r_w \sin q_v}{2} - \kappa_3 \dot{\xi}_3^{\text{Des}} \frac{r_w \cos q_v}{2} + (\kappa_3 - \kappa_2) r_w^2 \frac{\dot{q}_+ + \dot{q}_-}{4} \cos q_v \sin q_v \dot{q}_v \end{pmatrix}. \quad (30)$$

$$\ddot{q}_{r1,(n)}^{\text{Req}} = G \left(\ddot{q}_{r1,(n-1)}^{\text{Req}}, \ddot{q}_{r1,(n)}^{\text{DesR}}, \ddot{q}_{r1,(n-1)} \right) \quad (34)$$

melyben a G függvénynek 3 adaptív paramétere van: A_c , K_c , és B_c , továbbá $\ddot{q}_{r1,(n-1)}$ jelöli az n . ciklusban megfigyelt szöggyorsulásokat. E három adaptív paramétert úgy kell beállítani, hogy azok a G leképezést *kontraktív* tegyék a $\{\ddot{q}_{r1,(n)}^{\text{Req}}\}$ sorozatra konstans (vagy gyakorlatilag lassan változó) $\ddot{q}_{r1}^{\text{DesR}}$ értékek mellett. Ekor S. Banach fixpont tétele értelmében [35] e sorozat konvergál a szabályozási feladat megoldásához, azaz azon bemeneti \ddot{q}_{r1}^* értékekhez, melyekre a megfigyelhető válasz megegyezik a kívánt válasszal: $\ddot{q}_{r1,(n)} = \ddot{q}_{r1}^{\text{DesR}}$. E G függvényt a 3. ábrán látható programkód valósította meg a szimulációkban.

A 2. ábra fizikai értelmezése nagyon egyszerű: a „válaszhiba” $e_{\text{direction}} \in \mathbb{R}^2$ egységvektorának irányában alkalmaz a függvény egy nem-lineáris deformációt. A megfelelő konvergencia beállításához általában a $B_c = \pm 1$, $|K_c|$ nagy pozitív szám, és A_c pedig egy kis pozitív szám szokott lenni. A nagyjából megfelelő értékeket szimulációval lehet „belőni” pl. egy közönséges nem adaptív PD vagy PID jellegű visszacsatolást használó, rosszul működő szabályozó \ddot{q} jeleinek megfigyelésével. Ekkor a $|K_c| \gg \|\ddot{q}\|$ és $A_c \approx 0.1 \cdot |K_c|$ értékekkel érdemes kezdeni a vizsgálatokat. A B_c paraméter előjelét úgy kell választani, hogy konvergens megoldást kapjunk. A továbbiakban célunk példákat mutatni arra, hogy a javasolt kinematikai előírások hogyan működnek az adaptív dinamikai szabályozóval kombinálva.

7. Szimulációs eredmények

A nominális pálya egy körpálya bejárása volt a q_v orientációs szög folyamatos növelésével. A kocsis és a közelítő modell *kinematikai paramétere*i egymással azonosak voltak, a dinamikai paraméterek azonban nem: a közelítő modell feltételezte, hogy a két kerék tengelyének középpontja (ez volt a szabályozó által követendő helyű pont) egybeesik a

tömegközépponttal, míg a valódi rendszert a szimulációban helyettesítő modellben nem ez volt a helyzet:

Egzakt modell-paraméterek:

- A tehetetlenségi nyomaték számunkra érdekes adatai a „kezdeti pozícióban”: $\hat{\Theta}_{11}^{\text{Exact}} = 5 \text{ kg m}^2$, $\hat{\Theta}_{22}^{\text{Exact}} = 6 \text{ kg m}^2$;
- A tömegközéppont eltolódása a „kezdeti pozícióban”: $\hat{S}_1^{\text{Exact}} = 0.3 \text{ m}$, és $\hat{S}_2^{\text{Exact}} = 0.4 \text{ m}$;
- A kocsis teljes tömege: $M^{\text{Exact}} = 2 \text{ kg}$;
- A motortengely viszkozus súrlódási együtthatója: $b^{\text{Exact}} = 0.1 \text{ N m s rad}^{-1}$;
- A hajtások áttételi tényezője: $\nu^{\text{Exact}} = 0.1$, dimenziótlan;
- A motortekercs ohmikus ellenállása: $R^{\text{Exact}} = 1 \text{ Ohm}$;
- A motortekercs induktivitása: $L^{\text{Exact}} = 0.5 \text{ H}$;
- A motor nyomaték-együtthatója: $K^{\text{Exact}} = 0.01 \text{ N m A}^{-1}$ (Általában a K_t nyomaték-együttható határozza meg a motoráram és a kifejtett forgatónyomaték kapcsolatát mint $T = K_t i$, ahonnan annak mértékegysége ered. A motor mint generátor által generált elektromotoros erő („back EMF”) arányos a motortengely forgásának szögsebességével: $e = K_e \dot{q}^{\text{Mot}}$. Az SI mértékrendszerben e két konstans egymással megegyezik, ezért írható, hogy $K \stackrel{\text{def}}{=} K_t = K_e$ [34].)
- A motor forgórészének tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta^{\text{MotExact}} = 0.01 \text{ kg m}^2$;
- A kerekek sugara: $r_w^{\text{Exact}} = 0.1 \text{ m}$;
- A két kerék közti távolság fele: $D^{\text{Exact}} = 1 \text{ m}$;



```
function [ki]=szigmoid(x)
    ki=x/(1+abs(x));
endfunction
function [Req]=G(desired,past_exerted,past_observed)
    global Ac Bc Kc
    error=norm(past_observed-desired,'fro');
    if error>1e-4 then
        e_direction=(past_observed-desired)/error;
        B_factor=Bc*szigmoid(Ac*error);
        Req=(1+B_factor)*past_exerted+B_factor*Kc*e_direction;
    else
        Req=past_exerted;
    end
endfunction
```

2. ábra: A G adaptív függvényt megvalósító SCILAB kód

A közelítő modell paraméterei:

- A tehetetlenségi nyomaték számunkra érdekes adatai a „kezdeti pozícióban”: $\hat{\Theta}_{11}^{\text{Approx}} = 7 \text{ kg m}^2$, $\hat{\Theta}_{22}^{\text{Approx}} = 8 \text{ kg m}^2$;
- A tömegközéppont eltolódása a „kezdeti pozícióban”: $\hat{S}_1^{\text{Approx}} = 0 \text{ m}$, és $\hat{S}_2^{\text{Approx}} = 0 \text{ m}$;
- A kocsi teljes tömege: $M^{\text{Approx}} = 2.5 \text{ kg}$;
- A motortengely viszkozus súrlódási együtthatója: $b^{\text{Approx}} = 0.05 \text{ N m s rad}^{-1}$;
- A hajtások áttételi tényezője: $\nu^{\text{Approx}} = \nu^{\text{Exact}}$;
- A motortekercs ohmikus ellenállása: $R^{\text{Approx}} = 1.5 \text{ Ohm}$;
- A motortekercs inductivitása: $L^{\text{Approx}} = 0.55 \text{ H}$;
- A motor nyomaték-együtthatója: $K^{\text{Approx}} = 0.02 \text{ N m A}^{-1}$;
- A motor forgórészének tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta^{\text{MotApprox}} = \Theta^{\text{MotExact}}$;
- A kerekek sugara: $r_w^{\text{Approx}} = r_w^{\text{Exact}}$;
- A két kerék közti távolság fele: $D^{\text{Approx}} = D^{\text{Exact}}$;

A szabályozó ciklusideje 1 ms volt. A szabályozó paraméterek beállítása az alábbi volt: $b_{\text{bal}} = 0.5$, $\beta_{\text{kin}} = 0.5$, $w = 5 \times 10^{-2}$, $B_c = -1$, $K_c = 10^4$, $\Lambda = 3 \text{ s}^{-1}$, A_c értéke hangolva volt.

A „PID” és a „vágott PID” szabályozók pályakövetési hibája szinuszos moduláció és fix izotrop ($\kappa_2 = \kappa_3 \equiv 1$) beállítás esetén a 3.

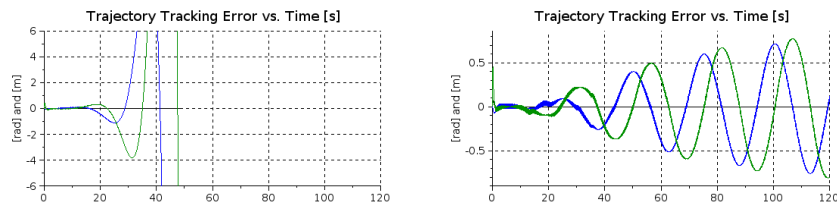
ábrán látható. Világos hogy míg általában az integráló tagok javítani szokták a pályakövetés pontosságát, a speciális kinematikai kényszerek mellett ezek még vágott formában is inkább destabilizálják a szabályozót. A továbbiakban ezért nem foglalkozunk az integráló tagot tartalmazó megközelítésekkel.

A 4. ábra a PD és „mohó PD” nem dinamikus adaptív szabályozók pályakövetési hibáit fedi fel szinuszos modulációra és az attól mentes esetre. Jól látható, hogy az adaptív „mohó PD” pályakövetési pontossága lényegesen jobb, mint a közönséges adaptív PD szabályozóé. Az is látható, hogy a moduláció kissé javít a követési pontosságon. A 5. ábra ugyanezen szimulációk (x, y) síkon végzett pályakövetését mutatja.

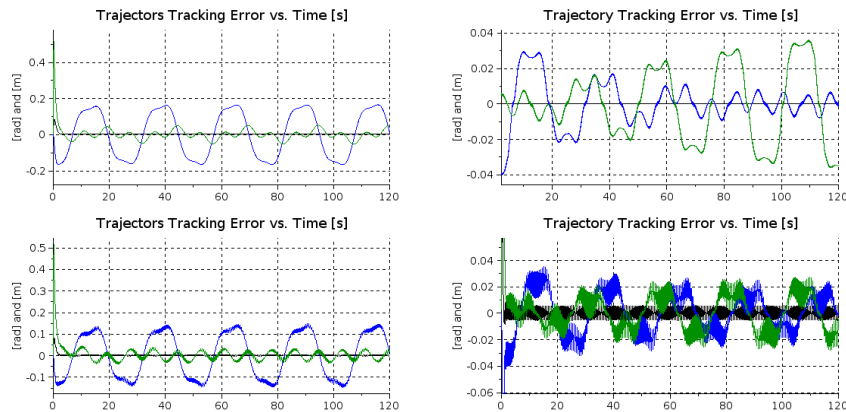
A 6. ábra a „mohó PD” pályakövetés \dot{q}_r és \dot{q}_l szögsebességeit mutatja, és felfedi, hogy a szinuszos moduláció miért javít a pályakövetésen. A legnagyobb frekvenciájú változás az RFPT alapú adaptívitás folyományára, a valamivel kisebb frekvenciájú pedig a nominális pálya modulációjáé a modulált esetben.

Annak bemutatására, hogy az RFPT alapú adaptívitás lényeges szerepet játszik a pontos pályakövetésben, elkészítettük a 7. és 8. ábrát, melyek önmagukért beszélnek a 4. és 5. ábrákkal való összevetésben.

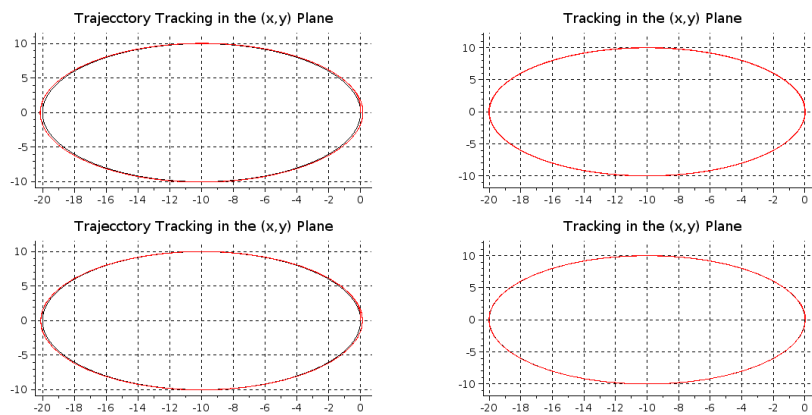
Az adaptív tanulás lényegét fedi fel a 9. ábra: míg a „kívánt” és a „szimulált” értékek egymás közelében vannak, a „deformált” értékek ezekről durván eltérnek. Az is jól látható, hogy a szinuszosan modulált nominális pályára az adaptív tanulás jobban működik.



3. ábra: A szinuszos modulációtól mentes, nem dinamikus ($\kappa_2 = \kappa_3 \equiv 1$ eset) adaptív szabályozó pályakövetési hibája PID szabályozás (bal oldal), és „vágott PID” szabályozás (jobb oldal) esetén [θ : fekete, x : kék, y : zöld vonal]



4. ábra: A szinuszos modulációtól mentes, nem dinamikus ($\kappa_2 = \kappa_3 \equiv 1$ eset) adaptív szabályozó pályakövetési hibája (felső sor), és modulált pálya (alsó sor) PD szabályozás (bal oldal) és „mohó PD” szabályozás (jobb oldal) esetén [θ : fekete, x : kék, y : zöld vonal]

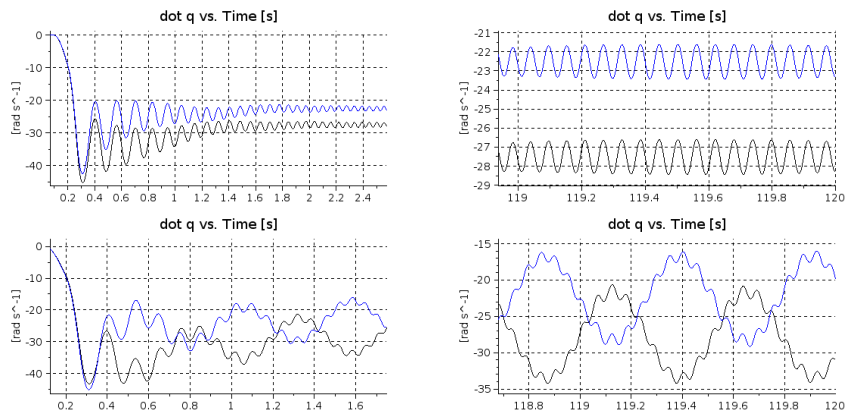


5. ábra: A szinuszos modulációtól mentes, nem dinamikus ($\kappa_2 = \kappa_3 \equiv 1$ eset) adaptív szabályozó pályakövetése az (x, y) síkon: szinuszos pályamoduláció nélkül (felső sor) és modulációval (alsó sor), és PD szabályozás (bal oldal), „mohó PD” szabályozás (jobb oldal), [nominális pálya: fekete, szimulált pálya: piros vonal]

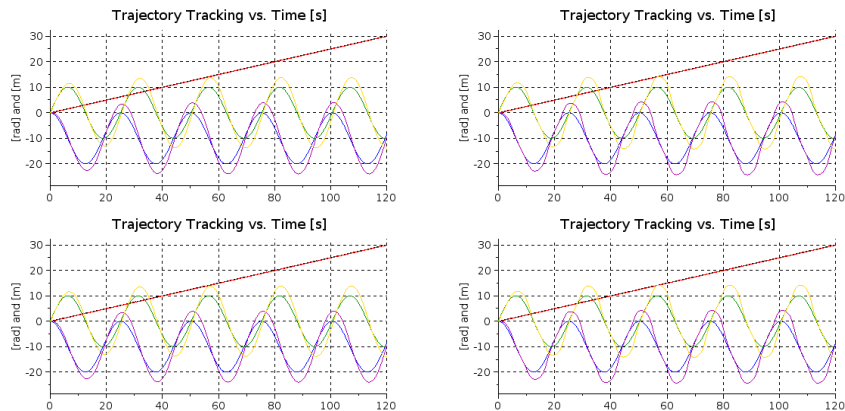
8. Összefoglalás, következtetések

A közleményben két aktív, DC motor hajtású keréssel mozgatott és egy passzív

tartókerékkel alátámasztott, pontatlan dinamikai paraméterű modellel leírt robotkocsi RFPT alapú adaptív dinamikai szabályozását vizsgáltuk. A szimulációs számításokban a modell-pontatlanságok formai következményeit



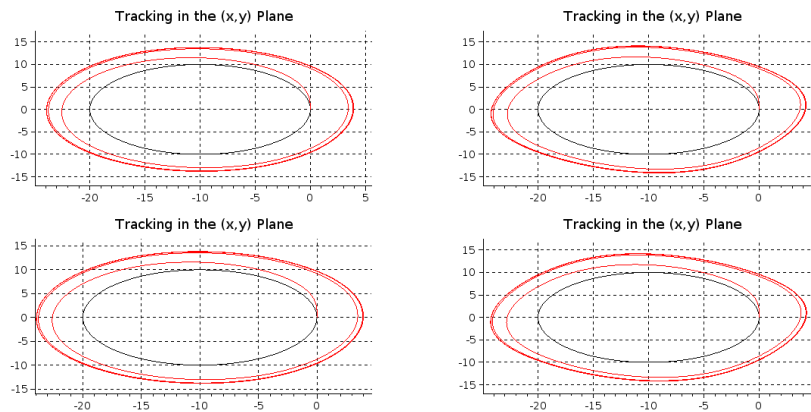
6. ábra: A nem dinamikus ($\kappa_2 = \kappa_3 \equiv 1$ eset) adaptív szabályozó \dot{q} értékei: szinuszos pályamoduláció nélkül (felső sor) és modulációval (alsó sor), „mohó PD szabályozás” esetén a pálya kezdetekor (bal oldal) és vége felé (jobb oldal) [\dot{q}_r : fekete, \dot{q}_i : kék vonal]



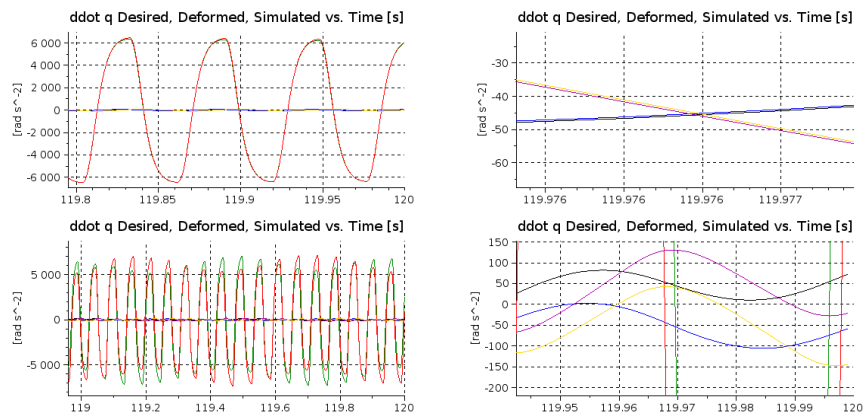
7. ábra: A szinuszos modulációtól mentes, nem adaptív szabályozó pályakövetése (felső sor), és modulált pálya (alsó sor) „mohó PD” szabályozás esetén: nem dinamikus pályakövetéssel (bal oldal) és dinamikus pályakövetéssel (jobb oldal) [θ^N : fekete, x^N : kék, y^N : zöld vonal, θ : piros, x : lila, y : okker vonal]

is figyelembe vettük, nevezetesen azt a körülményt, hogy a dinamikai paraméterek pontatlan ismerete miatt a rendszer mozgása nem írható le a tömegközéppont mozgásának és a körülötte való forgásnak a követésével, mivel a tömegközéppont helye nem ismert. Emiatt a mechanikai rendszer dinamikai mozgásegyenletei szétcsatolt LTI rendszer helyett általános csatolt, nemlineáris formát öltenek, amihez nem olyan egyszerű szabályozót tervezni, mint az LTI rendszerekhez. A feladatot tovább bonyolította a rendszer aluhajtottsága valamint az anholonom kinematikai kényszerek jelenléte, valamint a DC motorok induktivitása, ami miatt egy harmadrendű nemlineáris szabályozó rend-csökkentett változatát kellett kidolgozunk.

A feladat megoldására, felhasználva, hogy az RFPT alapú szabályozók egymástól teljesen független kinematikai és dinamikai tervezést tesznek lehetővé, különböző kinematika-ileg megfogalmazott pályakövetési stratégiákat vizsgáltunk (PID jellegű, az integrált tagban vágott PID, PD, „mohó PD” passzív és aktív hibasúlyozási stratégia mellett. A szimulációs számítások elvégzése után azt találtuk, hogy míg általában az integráló hiba-visszacsatolás javít a pályakövetési pontosságon, az anholonom kényszerek miatt esetünkben könnyen okozhat divergenciát és destabilizálhatja a szabályozót. A PD alapú szabályozás jól működik, és eredményein jelentősen javít a „mohó PD” változat használata, amely nem a végtelenben eltűnő, hanem véges idő alatt lenullázódó



8. ábra: A szinuszos modulációtól mentes, nem adaptív szabályozó pályakövetése az (x, y) síkon (felső sor), és modulált pálya (alsó sor) „mohó PD” szabályozás esetén: nem dinamikus pályakövetéssel (bal oldal) és dinamikus pályakövetéssel (jobb oldal) [nominális pálya: fekete, szimulált pálya: piros vonal]



9. ábra: A szinuszos modulációtól mentes, nem dinamikus ($\kappa_2 = \kappa_3 \equiv 1$ eset) adaptív szabályozó „kívánt=Des”, „adaptívan deformált”, és „szimulált” \ddot{q} értékei: szinuszos pályamoduláció nélkül (felső sor) és modulációval (alsó sor), „mohó PD szabályozás” esetén (bal oldal) és erős kinyújtásban (jobb oldal) [\ddot{q}_r^{Des} : fekete, \ddot{q}_1^{Des} : kék vonal, \ddot{q}_r^{Def} : zöld, \ddot{q}_1^{Def} : piros vonal, \ddot{q}_r : lila, \ddot{q}_1 : okker vonal]

pályakövetési hibát írta elő.

Vizsgáltuk továbbá a követendő pálya kis szinuszos modulációját, ami jobban tanulható mozgásra vezetett

A számításokban a 3 adaptív paraméter értéke közül kettőt fixáltunk és egyet hangoltunk, de helyhiány miatt a hangolás részleteivel a jelen közleményben nem tudtunk foglalkozni.

Összefoglalva megállapítható, hogy az RFPT alapú adaptív szabályozás alkalmas és hatékony eszköznek tűnik a modellhibák és a rendcsökkentés következményeinek kompenzálására és különböző, kinematikailag megfogalmazott pályakövetési stratégiák kinematikai kényszerek által engedett legjobb

közelítésének megvalósítására.

Mivel e módszernek van egy MRAC szabályozást megvalósító változata is, a továbbiakban érdemesnek tartjuk annak szimulációs vizsgálatát is robotkocsira. Ennek lényege lenne, hogy amennyiben a kinematikai pályakövetés emberi vezetőtől származik, a humán vezető várhatóan könnyebben boldogul egy tömegközéppont körüli mozgást imitáló LTI jellegű referencia modellel, mint a valóság nemlineáris, dinamikailag csatolt modelljével, tehát egy MRAC szabályozás jelentősen megkönnyíthetné a vezető dolgát.

Hivatkozások

- [1] A.M. Lyapunov. *A general task about the stability of motion. (in Russian)*. Ph.D. Thesis, University of Kazan, Russia, 1892.
- [2] A.M. Lyapunov. *Stability of motion*. Academic Press, New-York and London, 1966.
- [3] J.L. Chen and Wei-Der Chang. Feedback linearization control of a two-link robot using a multi-crossover genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2(2 Part 2):4154–4159, 2009.
- [4] I. Sekaj and V. Veselý. Robust output feedback controller design: Genetic algorithm approach. *IMA J Math Control Info*, 22(3):257–265, 2005.
- [5] Jean-Jacques E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [6] R. Isermann, K.H. Lachmann, and D. Matko. *Adaptive Control Systems*. Prentice-Hall, New York DC, USA, 1992.
- [7] C.C. Nguyen, S.S. Antrazi, Zhen-Lei Zhou, and C.E. Campbell Jr. Adaptive control of a stewart platform-based manipulator. *Journal of Robotic Systems*, 10(5):657–687, 1993.
- [8] J.K. Tar, J.F. Bitó, L. Nádai, and J.A. Tenreiro Machado. Robust Fixed Point Transformations in adaptive control using local basin of attraction. *Acta Polytechnica Hungarica*, 6(1):21–37, 2009.
- [9] K. Kósi, J.K. Tar, and I.J. Rudas. Improvement of the stability of RFPT-based adaptive controllers by observing „precursor oscillations”. In *Proc. of the 9th IEEE Intl. Conf. on Computational Cybernetics, Tihany, Hungary*, pages 267–272, 2013.
- [10] G. Oriolo, A. De Luca, and M. Vendittelli. WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation, and experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(6):835–852, 2002.
- [11] S. LeBel and L. Rodrigues. Piecewise-affine parameter-varying control of wheeled mobile robots. In *Proc. of the American Control Conference, 2008, Seattle, WA, USA*, [WeA05.3]:195–200, 2008.
- [12] V.M. Ojleska. *Control and Computational Synergy of Switched-Fuzzy and Fuzzy-Neural Nonlinear Systems*. Ph.D. Thesis, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Faculty of Electrical Engineering and Information Technologies, Republic of Macedonia, 2013.
- [13] K. Kósi, T.A. Várkonyi, and J.K. Tar. Deformálható elemen keresztül hajtott dinamikai rendszer RFPT alapú adaptív szabályozása. In: *Proc. of the Conference „INNOVÁCIÓ ÉS FENNTARTHATÓ FELSZÍNI KÖZLEKEDÉS 2013”, from 28 to 30 August 2013, Budapest, Hungary*, pages 1–6, 2013.
- [14] Z. Bai. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, 43:9–44, 2002.
- [15] B. Davies. *Integráltranszformációk és alkalmazásaik (in Hungarian)*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, Hungary, 1983.
- [16] B. Davies. *Integral Transforms and Their Applications*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [17] F. Constantinescu. *Distributions and Their Applications in Physics*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1980.
- [18] H. Padé. *Sur la représentation approchée d’une fonction par des fractions rationnelles (Thesis)*. Ann. École Nor. (3), 9, 1892, pp. 1–93 supplement, 1892.
- [19] B. Salimbahrami and B. Lohmann. *Krylov Subspace Methods in Linear Model Order Reduction: Introduction and Invariance Properties. Scientific report, 2002*. [http://www.iat.uni-bremen.de/mitarbeiter/salimbahrami/Invariance properties.pdf](http://www.iat.uni-bremen.de/mitarbeiter/salimbahrami/Invariance%20properties.pdf), 2002.
- [20] A. Bultheel and M. van Barvel. Padé techniques for model reduction in linear system theory: A survey. *J. Comput. Appl. Math.*, 14:401–438, 1986.
- [21] J.A. Tenreiro Machado, Alexandra M. Galhano, Anabela M. Oliveira, and J.K. Tar. Optimal approximation of fractional derivatives through discrete-time fractions using genetic algorithms. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 6:482–490, 2009.

- [22] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Nat. Bureau Stan.*, 45:255–282, 1950.
- [23] W.E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math.*, 9:17–29, 1951.
- [24] W.J. Rugh. *Nonlinear System Theory*. The John Hopkins University Press, Baltimore, MA, USA, 1981.
- [25] S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Springer, New York, 1999.
- [26] S. Lall, J.E. Marsden, and S. Glavaski. *Empirical model reduction of controlled nonlinear systems*. Technical Reports CIT/CDS 98-008, California Institute of Technology, 1998.
- [27] B. Lohmann. Order reduction and determination of dominant state variables of nonlinear systems. *Mathematical Modelling of Systems*, 1(2):77–90, 1995.
- [28] B. Salimbahrami and B. Lohmann. *A Simulation Free Nonlinear Model Order Reduction Approach and Comparison Study*. In Proc. 4th Mathmod, pages 429–435, Vienna, 2003., 2003.
- [29] I. D. Landau and R. Horowitz. Applications of the passive systems approach to the stability analysis of adaptive controllers for robot manipulators. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 3:22–38, 1989.
- [30] Jee-Wan Ryu, B. Hannaford, C. Preusche, and G. Hirzinger. Time domain passivity control with reference energy behavior. In: *Proc. of the 2003 IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, October 2003, Las Vegas, Nevada, USA*, pages 2932–2937, 2003.
- [31] R.W. Brockett. *Asymptotic stability and feedback stabilization (In: Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, Eds.)*. Birkhäuser, Boston, MA, USA, 1983.
- [32] P. Baranyi. Tensor product model-based control of two-dimensional aeroelastic system. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29:391–400, 2006.
- [33] B. Takarics. *TP Model Transformation Based Sliding Mode Control and Friction Compensation (Ph.D. dissertation)*. Budapest University of Technology and Economics, 2011.
- [34] <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed§ion=SystemModeling>. Last time checked: Feb. 1 2014.
- [35] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales (About the Operations in the Abstract Sets and Their Application to Integral Equations). *Fund. Math.*, 3:133–181, 1922.