Véletlen gráfok és logisztikai alkalmazásai

Dr. Péter Tamás*, Dömötörfi Ákos**

**BME Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék,*
1111 Budapest, Stoczek u. 2. (e-mail: peter.tamas@mail.bme.hu)
***Széchenyi István Egyetem, Multidiszciplináris Műszaki Tudományi Doktori Iskola*
H 9026 Győr, Egyetem tér 1. (Tel:+36-96-503-490; e-mail:cekaah@freemail.hu)

Absztrakt: A logisztikai hálózatok analízise során óhatatlanul előtérbe kerülnek azok a sajátosságok, ill. speciális tulajdonságok, amelyek az ellátási lánc jellegéből adódan vannak jelen. Ilyenek azok a véletlen jelenségek, sztochasztikus folyamatok, amelyek szorosan kapcsolódhatnak a logisztikai lánc analíziséhez aszerint, hogy a folyamatokat milyen mélységében vizsgáljuk. Az ilyen jelenségek leírásának egyik eszköze a véletlen gráfok alkalmazása és a tanulmány arra tesz kísérletet, hogy az egyszerű logisztikai alapmodellt ezekkel az eszközökkel írja le, illetve bemutassa a véletlen gráfok alkalmazási lehetőségeit a logisztikai modellezések további területein.

1. BEVEZETÉS

Az IFFK 2013 konferencián bemutatott (Dömötörfi, 2013) kutatási téma folytatásaként - melyben megfogalmazásra kerültek a modern kori logiszikát jellemző főbb tulajdonságok - jelen kutatás arra tesz kísérletet hogy ezen ismérvekre alapozva alkalmazzon olyan gráfelméleti módszereket, amelyek a logisztikai láncban rejlő kapcsolatok modellezését további matematikai összefüggésekkel egészítik ki.

Egyre inkább megerősítést nyert, hogy a logisztikai modelleken elvégzett továbbfejlesztések és az átfutási idő csökkentésére vonatkozó törekvések helyes irányt szabnak és rámutatnak a kutatás multidiszciplináris jellegére. Ezek a célok sok területen maguk után vonják a közlekedéstudományhoz szorosan kapcsolódó tudományos módszereket is. Nagyon sok párhuzamosság állapítható meg és ennek kapcsán jól össze lehet hangolni a logisztikai folyamatok analízisét a közlekedési rendszerek folyamatanalízisével. A pozitív dinamikus rendszerek elméletéből kiindulva és a nagyméretű közúti hálózatok elméletére támaszkodva, további fontos kutatási terület ez utóbbinak és a logisztikai hálózatok elméletének kapcsolata és ennek feltárása. Mivel a logisztika ma már nem nélkülözheti a modern irányításelmélet eszközeit sem, a modellezés mellett fontos az irányítási kérdések vizsgálata is! A kutatás, szállítási, logisztikai, elosztási-terhelési problémák vizsgálatára, optimálására szimulációs modellek készítésére, továbbá konkrét feladatok körében történő alkalmazására irányul.

2. ELMÉLETI HÁTTÉR

A véletlen gráf olyan gráf, amely valamilyen véletlen folyamat során jön létre. A véletlen gráfok elmélete a gráfelmélet és a valószínűségelmélet határterületét fedi le és a véletlen gráfok tulajdonságait vizsgálja (Barabási, 2003). A véletlen gráfokat először Erdős Pál és Rényi Alfréd határozta meg (Erdős-Rényi, 1959) közös cikkükben. Egy n csúcsból és M élből álló $G(n,M)$-el jelölt véletlen gráfot létrehozhatunk úgy, hogy egy n elemű csúcshalmazhoz az éleket véletlenszerűen adjuk hozzá. A különböző véletlengráf-modellek különböző valószínűséggel hozzák létre az egyes gráfokat.

Az Erdős–Rényi modell két rokon véletlen gráfok előállítására szolgáló modell neve.

2.1 I. Változata

Egyenlő valószínűséggel választ az összes adott élszámú gráf közül. Ez a modell olyan $G(n,M)$ gráfokat tartalmaz, melyeknek pontosan M élük van és minden egyes ilyen gráf pontosan egyforma valószínűséggel fordul elő.

2.2 II. Változata

Minden él egymástól függetlenül, egy adott valószínűséggel van behúzva. A legtöbbet tanulmányozott modell az Erdős–Rényi modell, jele $G(n,p)$, melyben minden élt a többitől függetlenül p valószínűséggel hozunk létre. Az utóbbi modell felfogható, mint a G_n jelű véletlengráf-folyamat pillanatképe egy adott pillanatban. Ez a folyamat egy sztochasztikus folyamat, amely n csúccsal indul, melyet nem kötnek össze élek és minden egyes lépésben egy új élet hoz létre egyforma valószínűséggel választva a hiányzó élek halmazából.

A véletlen gráfok elmélete a matematikai kutatások körében nyitott meg egy teljesen új területet, amelyről hamar bebizonyosodott, hogy ennek kiemelkedően fontos gyakorlati jelentősége is van. Az elmélet a véletlen gráfok olyan tulajdonságait tárgyalja, melyek nagy valószínűséggel fordulnak elő a gráfok bizonyos eloszlása esetén. Megvizsgálható egy meghatározott n és p érték esetén, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy $G(n,p)$ összefüggő? A kérdések tanulmányozásakor a kutatás gyakran a véletlen gráfok aszimptotikus viselkedésére összpontosul, azokra a kérdésekre, amelyeket akkor tapasztalnak, ha az n értéke igen

Online: ISBN 978-963-88875-3-5
CD: ISBN 978-963-88875-2-8

Editor: Dr. Péter Tamás

nagyra növekszik. A perkolációelmélet pl. a véletlen gráfok összefüggőségével foglalkozik abban az esetben, ha a véletlen gráf véletlen nagy. (Bollobás, 2001)

3. GYAKORLATI ALKALMAZÁS

Az ellátási és logisztikai láncok tipizálhatók a bennük megjelenő termék(ek) szerint. (Dömötörfi, 2013) Ugyanakkor közös hasonlóság, hogy a különböző típusú ellátási láncokat és azok megfelelő modellezhetőségét a beágyazottság szintje határozza meg. Szintén együttesen érvényes megállapítás, hogy a hálózatban rejlő kapcsolatokat bizonyos fokú determintáltság jellemzi (pl. beszállító-vevő kapcsolat előre meghatározott szerződés alapján). A determináltság szintjét az határozza meg, hogy az ellátási láncot milyen mélységében vizsgáljuk, mivel az egyes szinteken és azokon belül létrejövő kapcsolatrendszerek is részben véletlenszerűen kialakuló gráfoknak tekinthetők. Ennélfogva a véletlen gráfok szerepe a sztochasztikus modellezésben elméleti és gyakorlati szempontból is egyaránt jelentős. Vegyük ehhez a legegyszerűbb logisztikai viszonylatot az A-ból B pontba történő eljutást.

3.1 Honnan-Hová (Origin-Destination) mátrix

A logisztikai hálózati gráfon a pontos forgalmi helyzet felméréséhez az egyik legfontosabb információ az, hogy ismerjünk, hogy az egyes járművek honnan-hová és milyen útvonalon közlekednek? A közúton közlekedő járművek egy része dedikált jármű. Helyzetük, mozgási pályájuk könnyen meghatározható a korszerű eszközökkel. A járművek többsége azonban a tervezők számára véletlen mozgást végez a hálózati gráfon, általában nem tudjuk, hogy éppen hol helyezkedik el és azt sem tudjuk, hogy honnan hová tart?

A közúti hálózatokon a forgalmi folyamatok analízisénél a nehezen, vagy egyáltalán nem mérhető forgalmi paraméterek meghatározására a szakirodalomban jelentős szerepet kapnak a különböző becslési eljárások. Ezen a területen egy igen fontos kérdés az Honnan-Hová mátrix meghatározása, amely a forgalmi folyamatok irányultságának ismeretén keresztül szolgálja az optimális tervezését.

Ebben az esetben az szakirodalomból ismert becslési módszerek arra vonatkoznak, hogy ha egy adott közúti hálózatnál (részrendszernél), valamely időkeresztmetszet esetén ismert az inputok esetében a több irányból behaladó és az outputok esetén a több irány felé kihaladó járművek száma, akkor képesek vagyunk becsülni azt, hogy a behaladó járművek milyen irányokban távoztak. Ez a becslés természetesen egy konkrét egyedi jármű esetében nem tud információt szolgáltatni. A becslés azt az információt tudja nyújtani, hogy az egyes inputokat tekintve, tőlük várhatóan, mekkora járműarány haladt ki az egyes outputok irányában.

A szakirodalomban a Honnan-Hová mátrix a becsült arányokat foglalja össze egy mátrixban. Az első oszlopban vannak az inputok (behajtó ágak) és az első sorban az outputok (kihajtó ágak).

A mátrix egyes elemei az adott input-irányból az egyes output-irányokba kihajtó gépjárművek százalékos eloszlását mutatják.

A becslési eljárásoknál jelentős segítséget nyújtanak a modern irányításelméleti eredményeinek is. Ebben a vonatkozásban pl. különösen alkalmas a Kálmán – szűrés felhasználása.

3.2 Eljutás valószínűsége a hálózat (gráf) tetszőleges másik szektorára

A jármű-és szállítási folyamatok irányultsága következtében a vizsgálat tárgyát képező hálózati gráf irányított gráf. Ezen az irányított hálózati gráfon egy tetszőleges ***j*** élről valamelyik hozzá csatlakozó élre véletlen választással lépünk át, az irányításokat és a j végpontján lévő csúcsra definiált diszkrét valószínűség-eloszlást figyelembe véve. Ilyenkor a hálózati terhelés és forgalomelosztás optimálása szempontjából fontos kérdés, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy a hálózati gráf egy tetszőleges ***i*** élére érkezünk ***(i, j= 1,2,…,n)***? A véletlen gráfok körében ez esetben ***j*** élből induló és ***i*** élben végződő véletlen irányított részgráfokat vizsgálunk, amelyek a gyakorlati szempontból, valamilyen valószínűséggel bekövetkező útvonalak.

A gyakorlati problémáknál figyelembe veendő az idő és sebesség is, mivel a különböző időpontokban változhat a csúcsokban a disztribúció is (tér, idő probléma). A Honnan-Hova problémánál vizsgálhatunk, csak ***j***-ből induló homogén folyamatokat és ezekre meghatározott disztribúciókat, de vizsgálhatunk minden lehetséges csúcsból kiinduló inhomogén folyamatokat is. (több input probléma)

3.3 Mikroszkópikus modell

Az új vizsgálat véletlengráf-elméleti analíziseket alkalmaz, amely támaszkodik a nagyméretű hálózati modellre, annak anyagáram disztribúciójára, amely minden hálózati él végpontjában egy diszkrét valószínűségi eloszlást követ. A modell a nemlineáris pozitív rendszerek osztályába tartozik.

A pozitív rendszerek első definícióját Luenberger adta meg: *A pozitív rendszer egy olyan rendszer, amelyben az állapotváltozók nem negatívak.* (Luenberger, 1979) A vizsgált közúti közlekedési folyamatok többségében az állapotok eredeti fizikai jelentése alapján megfelelnek ennek. Az új hálózati modellt ténylegesen más gráf írja le. A hálózati forgalom lebonyolítása valójában elemek (szakaszok) sokaságának a dinamikus kooperációja. A kooperáció az átadás és befolyásolás, amely állapottól és időtől függő. Az egész hálózatot tekintve, ténylegesen szakaszok kooperálnak szakaszokkal és ezek a szakaszok (elemek) alkotják az irányított hálózati gráf csúcsait. Az élek dinamikus relációk. Ezek a dinamikus relációk egyszerre szabályoznak átadási sebességet és anyagáram mennyiséget is! A dinamikus kapcsolati gráf általános felépítésű, ily módon térkép-hálózat invariáns, bármely város, közúti hálózat leírható ezzel a módszerrel. (A dinamikus kapcsolati gráf nem duálisa a térkép-hálózati gráfnak.) Ha egy szektor esetében, valamely időtartamon az átadott járműszámot vizsgáljuk, automatikusan eljutunk a térbeli lefedettséget alkalmazó járműsűrűség fogalmához, amely egy egzakt geometriai definíció és belátható, hogy bármely parkoló is jellemezhető ezzel a sűrűséggel!

Összefoglalva, fontos kiemelni az alábbi eredményeket: A parkolók általánosított szakaszokként kezelhetők és ugyanolyan dinamikus elemei a hálózatnak, mint a sávok. Ennek következében, minden állapotjellemző értékkészlete a [0,1] intervallumban helyezkedik el és egyazon elemek sokaságából épül fel a közúti hálózat dinamikus modellje. (Péter-Bokor, 2007), (Péter, 2007a,b) A nagyméretű közúti közlekedési hálózati folyamatok matematikai modellezésére speciális hipermátrix struktúrát adtunk meg, amely egy (nem feltétlenül egyszeresen összefüggő) tartományban elhelyezkedő hálózat esetén leírja a hálózati elemek közötti belső-belső, külső-belső, belső-külső és a külső-külső kapcsolatokat. (Péter, 2005), (Péter-Bokor, 2006), (Péter, 2007a,b) és (Péter, 2008).

3.3.1 Az univerzális és a szűkített hálózati forgalmi modellt

A $\boldsymbol{K_B}$ belső kapcsolatokat leíró hipermátrixnál mindenféle kapcsolat fellép, kivéve a külső-külső kapcsolatokat. A $\boldsymbol{K_K}$ külső kapcsolatokat leíró hipermátrixnál pedig mindenféle kapcsolat fellép, kivéve a belső-belső kapcsolatokat. A külső-belső ill., belső-külső kapcsolatokat a $\boldsymbol{K_B}$ és $\boldsymbol{K_K}$ egyaránt tartalmazza. A két hipermátrix halmazelméleti uniója határozza meg a teljes kapcsolati rendszert leíró kapcsolati hipermátrixot.

$$K = K_K \bigcup K_B = \begin{bmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ahol: **K**, $\mathbf{K}_K$ $\mathbf{K}_B \in \Re^{(n+m)x(n+m)}$, $\mathbf{K}_{11} \in \Re^{nxn}$, $\mathbf{K}_{12} \in \Re^{nxm}$, $\mathbf{K}_{21} \in \Re^{mxn}$, $\mathbf{K}_{22} \in \Re^{mxm}$ és $x \in \Re^n$, $s \in \Re^m$.

A belső és külső hálózat működését egyszerre leíró általános hálózati modell a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle L \rangle^{-1} & \\ & \langle P \rangle^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ahol: $\langle L \rangle$ a belső szektorok és $\langle P \rangle$ a külső szektorok hosszát tartalmazó diagonális mátrixok:

$$\langle L \rangle = \langle l_1, l_2, ..., l_n \rangle, \ \langle P \rangle = \langle p_1, p_2, ..., p_m \rangle \tag{3}$$

A $\boldsymbol{K_{11}}$ és $\boldsymbol{K_{22}}$ fődiagonálisában 0 vagy negatív értékek lépnek fel, minden más elemük nemnegatív értéket vesz fel. A $\boldsymbol{K_{12}}$ és $\boldsymbol{K_{21}}$ minden eleme nemnegatív értéket vesz fel. Tehát ezek a mátrixok Metzler matrixok, következésképpen az általuk meghatározott teljes kapcsolati rendszert leíró $\boldsymbol{K}$ kapcsolati hipermátrix is Metzler matrix. Ahol:

$x \in \Re^n$ a belső szektorok állapotjellemző vektora,

$s \in \Re^m$ a külső szektorok állapotjellemző vektora,

$\dot{x} \in \Re^n$ a belső szektorok állapotjellemző vektorának idő szerinti deriváltja,

$\dot{s} \in \Re^m$ a külső szektorok állapotjellemző vektorának idő szerinti deriváltja,

Összefoglalva: a kapcsolati hipermátrix felhasználásával egy egységes matematikai modellt állítottunk fel. Ugyanakkor, a forgalmat leíró térkép-gráf, minden kezdeti kiindulás alapja és ez a valóságot képviselve, mindig jelen van a modellben, de „el van fedve” a modellezés során. Ez eredményezi azt, hogy a felírt matematikai modell formailag egy egységes, „univerzális hálózati forgalmi” modell, amelyben az egy-egy térképre utaló sajátosságok csupán a kapcsolati mátrix elemeinél jelennek meg. Fentiek alapján, az egyes kapcsolatokat befolyásoló, pl. a domborzati, éghajlati, látási, útviszonyok stb., minden esetben figyelembe vannak véve a kapcsolati mátrixok azon elemeinél, amelyekre ezek hatnak, így pl. az ott felírt sebesség-járműsűrűség függvényeknél is. Fontos tehát kiemelni az alábbi eredményt: tetszőleges zárt görbe által körülhatárolt tartomány esetében megadtuk a belső és külső hálózat működését egyszerre leíró univerzális hálózati forgalmi modellt és a belső és külső hálózati folyamatok működését leíró nemlineáris pozitív differenciálegyenlet-rendszert. (Péter, 2008)

3.3.2 Globális hálózati modell felírása

A hálózat mérete tetszőleges, a $\boldsymbol{K_{11}}$ mátrixok mérete két irányban módosítható, vagy mindaddig, amíg $\boldsymbol{K_{22}}$ el nem tűnik, vagy addig, amíg a $\boldsymbol{K_{11}}$ mátrix el nem tűnik. Mindkét eset ekvivalens, megkapjuk az autonóm globális modellt.

A globális hálózat egyenlete az alábbi differenciálegyenlet-rendszer, amely pozitív nemlineáris rendszer, a $\boldsymbol{K_{11}}$ mátrix és a fentiek alapján Metzler mátrix. Az ilyen rendszerek matematikai vizsgálata rendkívül izgalmas és modern terület.

$$\dot{x} = \langle L \rangle^{-1} K_{11}(x) x \tag{4}$$

Ahol: L = diag{l_1, ... ,l_n}, $\boldsymbol{l_i}$ a főátlóban a belső szakaszok hossza ($\forall l_i>0$, i=1,2,…,n), $K_{11} \in \Re^{nxn}$ $x \in \Re^n$, $\dot{x} \in \Re^n$, részletezve:

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahol:

$$v_{ii} = -\left(\sum_{r=1;(r\neq i)}^{n} v_{ri} \right) \tag{6}$$

Online: ISBN 978-963-88875-3-5
CD: ISBN 978-963-88875-2-8
Editor: Dr. Péter Tamás

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & (1) & (2) & (i) & (n\text{-}1) & (n) \\
\hline
(1) & v_{1\,1} & v_{1\,2} & v_{1\,i} & v_{1\,n\text{-}1} & v_{1\,n} \\
(2) & v_{2\,1} & v_{2\,2} & & & \\
(i) & & & v_{i\,i} & & \\
(r) & v_{r\,1} & v_{r\,2} & v_{r\,i} & v_{r\,n\text{-}1} & v_{r\,n} \\
(n\text{-}1) & & & & v_{n\text{-}1n\text{-}1} & \\
(n) & v_{n\,1} & v_{n\,2} & v_{n\,i} & v_{n\,n\text{-}1} & v_{n\,n} \\
\hline
\end{array}
$$

1. ábra. K_{11} Elemei

Részletezve:

$$v_{11} = -\left(\sum_{r=1;(r\neq 1)}^{n} v_{r1}\right) \qquad (7)$$

$$v_{22} = -\left(\sum_{r=1;(r\neq 2)}^{n} v_{r2}\right) \qquad (8)$$

$$v_{n-1n-1} = -\left(\sum_{r=1;(r\neq n-1)}^{n} v_{rn-1}\right) \qquad (9)$$

$$v_{nn} = -\left(\sum_{r=1;(r\neq n)}^{n} v_{rn}\right) \qquad (10)$$

A sebesség és anyagmennyiség szabályozása egyszerre jelenik meg a kapcsolati mátrix v_{ij} elemében, mivel a mátrix és állapotjellemző vektor szorzatában szereplő $v_{ij} \cdot x_j$, a forgalmat leíró szorzatoknak tényleges sebességeket és sűrűségeket kell figyelembe venni:

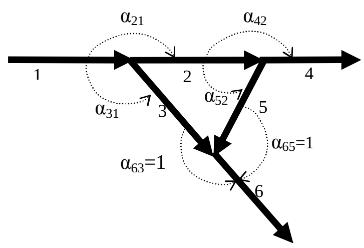
$$\hat{v}_{ij}\hat{x}_j = S(x_i(t))\cdot V(x_i(t),x_j(t),\underline{e}_i,\underline{e}_j)\cdot E(x_j(t))\cdot u_{ij}(t)\cdot \beta_{ij}(x(t),t)\alpha_{ij}(x(t),t)\cdot \gamma_{ij}(x(t),t)\cdot x_j \qquad (11)$$

Így adódik, hogy a kapcsolati mátrixban az alábbi kapcsolati sebesség jelenik meg:

$$v_{ij} = S(x_i(t))\cdot V(x_i(t),x_j(t),\underline{e}_i,\underline{e}_j)\cdot E(x_j(t))\cdot u_{ij}(t)\cdot \beta_{ij}(x(t),t)\cdot \alpha_{ij}(x(t),t)\cdot \gamma_{ij}(x(t),t) \qquad (12)$$

3.4 A dinamikus modellből származtatott valószínűségi mátrix.

A 3.3. fejezetben ismertetett dinamikus modell tartalmazza az $\boldsymbol{\alpha}_{ij} \geq 0$ disztribúciókat. Ebből származtatható a ***j***-ből történő kiindulást követően, bármely lehetséges útvonal-terv megvalósulásának valószínűsége, amely konkrét esetekben napszaki, napi, szezonalitástól és meteorológiai eseményektől is függő lehet. A számítás menetére mutatunk be mintapéldákat, soros és párhuzamos útvonalak szerepét is szemléltetve (2., 3. ábrák), az útvonal szakaszín történő tartózkodások valószínűségének meghatározására. A mintapéldákban ***j=1*** és ezen ***p*** valószínűséggel tartózkodik kiinduláskor a jármű.



2. ábra

Átmenetvalószínűségek:

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{4,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{5,3} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

0. lépés:

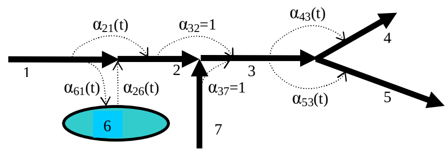
$$X := \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

1. lépés: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \alpha_{3,1}\,p \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{6,1}\,p \end{bmatrix} \qquad (15)$$

2. lépés, itt már minden átadás megvalósult, ez a végleges eredmény: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \alpha_{3,1}\,p \\ \alpha_{4,3}\,\alpha_{3,1}\,p \\ \alpha_{5,3}\,\alpha_{3,1}\,p \\ \alpha_{6,1}\,p \end{bmatrix} \qquad (16)$$



3. ábra

Átmenetvalószínűségek:

$$K := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,6} & 0 \\ 0 & \alpha_{3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,7} \\ 0 & 0 & \alpha_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{5,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

0. lépés:

$$X := \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

1. lépés: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ \alpha_{2,1}\,p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{6,1}\,p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

2. lépés: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ \alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p \\ \alpha_{3,2}\,\alpha_{2,1}\,p \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{6,1}\,p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3 lépés: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ \alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p \\ \alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{4,3}\,\alpha_{3,2}\,\alpha_{2,1}\,p \\ \alpha_{5,3}\,\alpha_{3,2}\,\alpha_{2,1}\,p \\ \alpha_{6,1}\,p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

4. lépés: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ \alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p \\ \alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{4,3}\,\alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{5,3}\,\alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{6,1}\,p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

5. lépés: innen már minden átadás megvalósult, ez a végleges eredmény: **X:=evalm(K&*X)**

$$X := \begin{bmatrix} p \\ \alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p \\ \alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{4,3}\,\alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{5,3}\,\alpha_{3,2}\,(\alpha_{2,1}\,p + \alpha_{2,6}\,\alpha_{6,1}\,p) \\ \alpha_{6,1}\,p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

4. KONKLÚZIÓ

A modellezés során belső univerzális hálózatot vizsgálunk, melyben csak az $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ diszkrét valószínűségi eloszlást követő változókat adjuk meg.

A vizsgált kiindulási ***j*** szakaszon 1 (vagy $\boldsymbol{p}_j$) valószínűséggel van a jármű. mátrix műveletet mindaddig folytatjuk, amíg a vizsgált hálózat minden ***i*** –ik szakaszán (szektorában) már nem változik (azaz stabil) a $\boldsymbol{p}_i$ valószínűség ***(i=1,2,…,n).*** Ily módon határoztuk meg a valószínűségi vektort, amely az ***i***-ik szakaszra érkezés valószínűsége a tetszőleges ***n*** méretű hálózaton.

Tehát: vizsgálhatunk tetszőleges j-ről induló egyedi járművet, amely a vezető napi szokásai szerint végez mozgást a hálózaton. Vizsgálhatunk folyamot, amely ***j***-ről indul, és a szétosztások szerint juthat el ***i***-be. Itt időbeliséget is vizsgálhatunk. A módszer direkt, gyors, irányítási alkalmazhatósága van, a szétosztási pontokon a disztribúció mindig sokaság átlag, amely különböző odaérkező szereplők különböző véletlen utazási terveiből adódik. Infokommunikációs technológiák (pl. GPS-ből származtatható adatok) alapján ma már tudjuk rögzíteni az egyes szállítójárművek valószínűségelméleti alapú utazási szokásait is. Ezzel nem csak a tömegjelenségek, de egyes szereplők, ill. szereplő szereplői típusok tartózkodási szokásai is analizálhatók, közlekedésbiztonság, bűn és terrorizmus megelőzés, stb. területek kiemelt fontosságúak!

Itt abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy a tetszőleges méretű hálózatok járműforgalmi modellezése során vizsgáltuk a fenti problémát. A geometriai hálózat nem véletlen gráf, viszont, a csúcsoknál érvényesülő disztribúciók, minden csúcsnál valamely idő és állapotfüggő diszkrét valószínűség-eloszlást követnek. Ezért, a csúcsok közötti kapcsolatok vizsgálatánál (pl., mekkora annak a valószínűsége, hogy tetszőleges ***j***-ből tetszőleges ***i***-be történik szállítási/utazás ill., azt érintve), már a véletlen gráfok elméletének alkalmazása történik.

5. A KUTATÁS TOVÁBBI IRÁNYAI

Az előzőekben láthattuk, hogy aszerint hogy az ellátási láncban determinisztikus vagy sztochasztikus folyamatokról beszélünk ezt a vizsgálat mélysége mutatja meg. Jól látható, hogy modellezési szempontból a véletlen gráfok képesek nyomonkövetni, illetve leírni az egyeses logisztikai hálózatok keletkezését illetve azok formálódását.

Esetünkben a véletlen gráf fix csomópontokból, csúcspontokból áll, és az ezek között létrejövő kapcsolatok alakulása képezi a folyamat dinamikáját. Újabb megközelítés, a kis-világ hálózatok elemzése (Barabási, 2003), (Buchanan, 2003) amely szintén a dinamikus gráfokkal dolgozik, ahol nem csak az élek, hanem a csomópontok száma is változik. Cél, hogy minél pontosabb modellt adjunk, mivel a logisztikában megtervezett szállítási útvonalak vannak (korábban tárgyalt determináltság kérdése), amelyek ha minden rendben vannak akkor terv szerint történnek. Amikor viszont szállítás történik a közlekedés bekapcsolódik a láncba, ami viszont sztochasztikus lefolyású folyamat. Ebből adódóan maga a logisztikai folyamat egy bonyolult rendszerré válik melyben a szállításoknál lehetnek zavarok. Ezszerint a trajektória lehet, hogy megvalósul, de az is lehet, hogy torlódások, balesetek, elterelések miatt nem, ezért a véletlenek szerepének vizsgálatát, költség, idő és biztosítási oldalról is figyelembe kell venni! (Extrém esetekben pl. háborúban felrobbantják azt a hidat mely az utánpótlást biztosítja). További fontos kérdés, hogy hogyan függ a hálózat összteljesítménye a kiiktatott útvonal(ak) számától? (ez esetben átlagos eljutási idő, átlagos úthossz, átlagos várakozási idő stb.) Ezeket lehet nagy valószínűséggel kalkulálni és matematikai, sztochasztikai, és operációkutatási modellekkel leírni. A gyakorlatban ezen a területen ezt nevezzük dinamikus gráf szervezésnek melynek a szervezése folyamatosan, célfüggvények figyelembe vételével történik, (minőség, költség idő tényezők szerepelnek ebben). Ezt az ellátási lánc típusától függően össze kell állítani, és lehet szimulálni is, ha megadjuk az egyes célfüggvények tulajdonságait. Milyen termék (vagy szolgáltatás) van a láncban, milyen beépülési szintjei léteznek, milyen alkooperációs csúcsaik vannak, és kikkel alkotnak egységet a termékösszeállításánál. A rendszer méretét tekintve szintén nem utolsó szempont a rugalmasági tényezők figyelembe vétele és azok modellbe történő integrálása.

IRODALOMJEGYZÉK

Barabási, Albert-László (2003). *Behálózva. A hálózatok új tudománya*, Magyar Könyvklub, Budapest.

Bollobás, Béla (2001). *Random Graphs*, *Second Edition*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Buchanan, Mark (2003). *Nexus, avagy kicsi a világ. A hálózatok úttörő tudománya*, Typotex, Budapest.

Dömötörfi, Ákos (2013). Az AETR-szabályozás hatása az autóipari készletek alakulására, *Közlekedéstudományi Szemle*, **4. szám,** pp.19-24.

Dömötörfi, Ákos (2013). Paradigmaváltás a logisztikában. *Innováció és Fenntartható Felszíni Közlekedés Konferencia 2013 Budapest, Konferenciakötet*, **Paper 17**, pp.86-95.

Erdős, P., Rényi, A. (1959). On random graphs. *I. Publicationes Mathematicae (Debrecen)*. **6**, pp.290–297.

Luenberger, David G. (1979). *Introduction to Dynamics Systems: Theory, Models and Applications*, John Wiley and Sons, New York

Péter, Tamás (2005). Közúti közlekedési hálózat generálása és a modell szimulációs vizsgálata. Intelligens közlekedési rendszerek és jármû-controll. Előírások a közlekedés biztonságának növelésére. *Magyar Mérnökakadémia Symposium Budapest*, pp.444-464.

Péter, T., Bokor, J. (2006). Járműforgalmi rendszerek modellezése és irányításának kutatása, *A Jövő Járműve – Járműipari Innováció*, **1-2. szám,** pp.19-23.

Péter, Tamás (2007,a). Nagyméretű nemlineáris közlekedési hálózatok modellezése, *Közlekedéstudományi Szemle*, **9. szám**, pp.322- 331.

Péter, Tamás (2007,b). Nagyméretű közúti közlekedési hálózatok analízise. *Innováció és Fenntartható Felszíni Közlekedés Konferencia 2007 Budapest, Konferenciakötet*

Péter, T., Bokor, J. (2007). Nagy méretű közlekedési hálózatok nemlineáris modelljének kapcsolati hipermátrixa, *A Jövő Járműve – Járműipari Innováció*, **1-2. szám,** pp.16-21.

Péter, Tamás (2008). Tetszőleges méretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok modellezése speciális hálózati gráffal, amelyben a gráf csúcsai általánosított szakaszok, a gráf élei a csúcsok közötti kooperálót leíró dinamikus relációk. *A Jövő Járműve – Járműipari Innováció*, **3-4. szám**, pp.26-29.