

## A globális közúti hálózati modell és alkalmazása az intelligens hálózatok létrehozásánál, a BME kutatóegyetemi programjában

Dr. Péter Tamás \*

\* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Közlekedésautomatikai Tanszék  
H 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. (tel.: +36-1-4631013, e-mail: peter.tamas@mail.bme.hu)

**Abstract:** A közúti közlekedés korszerű tervezéséhez és korszerű szabályozásához elengedhetetlen a közlekedési folyamatok mélyebb ismerete. A folyamatokat leíró közúti közlekedési rendszerek nagyméretű sztochasztikus dinamikus rendszerek. A most bemutatott kutatási munkát több olyan alapkérdés motiválta, amelyeket a jelenlegi modellezési technikákban elhanyagolnak, viszont a gazdaságilag jelentős problémákra választ kereső nagyméretű hálózati modellek alkalmazásakor nem kerülhetünk meg. Ez a kutatás egy új elvű megközelítést ad a globális közúti hálózati folyamatok leírására és az intelligens hálózatok megvalósítására. A kutatás az elmélet vonatkozásába a hálózat általános dinamikus működését vizsgálja. A gyakorlat terén, a hálózatfejlesztés és tervezés olyan problémáira összpontosít, amelyeknek a megoldásai pontos választ adnak arra, hogy egy meglévő, vagy fejlesztendő hálózaton milyen konkrét folyamatok zajlanak le? Megfelel-e az adott hálózat, (ill. az a fejlesztéseket követően) a fenntartható fejlődés kritériumainak? A kutatás során rámutatunk arra, hogy a hagyományos modellezési szemlélet alkalmazása igen sok megválaszolatlan kérdést vet fel, és állandóan méretproblémákkal küzd. Választ kell adni tehát, olyan alapkérdésekre, mint: Lehet-e bármely ilyen, rendszerre egységes matematikai modellt felírni? Pl. olyant, mint a mechanikai rendszereknél ismert Hamilton-féle variációs elv, amelyre a Lagrange rendszerek épülnek? Lehet-e, nem csak részhálózati példákat tárgyalni (csomópontokat, csomópont-együtteseket, v. körgyűrűt stb.), hanem tetszőleges méretű hálózatra általános elvű modellt felírni? Végül, felírható-e a globális modell, amely figyelembe vesz minden létező hálózati elemet?

### 1. BEVEZETÉS

**A nagyméretű közlekedési hálózatok kutatása, az elméleti kérdések vizsgálata mellett kiemelt gyakorlati jelentőséggel is bír!** Napjainkban, a gazdasági és társadalmi folyamatok egyre nagyobb kihívásokat támasztanak a közlekedési rendszerekkel szemben. Különösen igaz ez, a közúti közlekedési alágazatra, amely a szárazföldi közlekedés meghatározó tényezője. A közúti közlekedés bír a legnagyobb teljesítménnyel a közlekedési módok között, az áru és személyszállításnál egyaránt 70-75%-ot képvisel az Európai Unióban és Magyarországon is. Ugyanakkor, a gazdasági veszteségeket tekintve egy igen pazarló alágazat. Az Európai Unióban a forgalmi dugók évente közel 20 milliárd EUR veszteséget okoznak. A baleseti költségek a közösségnek évente mintegy 130 milliárd EUR kárt okoznak (ide értve az anyagi károkat, az adminisztratív költségeket, orvosi ellátási költségeket, a termelési veszteségeket és a kockázati értékeket is) [OTKA CNK78168 - CONTRA]. A kettő együtt 1,5-szerese a Magyar GDP-nek! Figyelembe véve a környezeti károkat is, a teljes összeg évente meghaladja Magyarország bruttó hazai össztermékének a kétszeresét.

A közlekedés minősége kiemelkedő szerepet tölt be a különböző társadalmi célok elérésében. Ilyenek pl. a környezetbarát gazdaságos működés és a munkahelyhez,

oktatáshoz, egészségügyi ellátáshoz, pihenési és rekreációs lehetőségekhez való hozzáférések. Az említett társadalmi célok elérésnek egyik fontos eleme a közúti forgalomirányítás hatékonyságának javítása. A folyamatok megértésében és a szabályozási problémák megoldásában, segít a különböző diszciplínák által kidolgozott elméleti eredmények integrálása. A közúti közlekedést egyértelműen az jellemzi, hogy nagyméretű hálózaton, hatalmas tömegáram valósul meg. A teljes úthálózat hossza a világban 69 millió km és ezen jelenleg több mint 900 millió közúti jármű közlekedik. A járművek együttes hossza 79-szer kerüli meg az egyenlítő. A hálózaton a növekedés 25-35 millió gépjármű/év.

Természetesen, maga a feladat igen összetett: a közlekedési hálózat rendkívül bonyolult, belső automatizmusok, humán tényezők, sokféle szabály, geometriai, adat, szezonáltság, stb. jellemzi. Minden részhálózat más, sokféle az egyedi szabály, ennek kapcsán, bármely részhálózat, csak egy nagyon kis rész az egészből és minden esetben csak a nagy hálózatból kivett példa lehet! Lehet-e ezekből, a példákból következtetni az egészre, a teljesre? Ha megoldjuk egy résznek az optimalizálását, nincs válasz, arra, hogy mi van a komplementerrel? Például, nem tudjuk, hogy nem toltuk-e át oda a problémát? Ha szoftveresen algoritmizált modelleket alkalmazunk, ezek nem alkalmasak arra, hogy egzakt (matematikai) következtetéseket, ill. eredmények adjanak!

Ugyanakkor, a viszonylag kisméretű modellek is támaszthatnak rendkívüli számítási igényt, pl. parciális differenciál-egyenletrendszerrel dolgozó egyes makroszkopikus modellek. A nagyméretű hálózat folyamatosan töltődik az autógyárak termelése révén és ürül az amortizáció (roncs járművek kilépése) révén, - tehát a belső anyagáram összes volumene is folyamatosan változik.

Probléma a parkolók szerepe is! Ezek a hagyományos modellekben más típusú szereplők, (idegen elemek), mint az útszakaszok a közúti hálózatban.

A kutatás célja a hagyományos térkép-gráf szemlélet helyett egy új modell létrehozása, amely matematikai területen a pozitív NL. rendszerek elméletéhez vezet.

Az általa elérhető nagyméretű hálózati problémák megoldása és az új irányítási lehetőségek kiemelése, Ljapunov függvényt alkalmazó irányítási elv és optimalás megvalósítása.

**Ennek megfelelően, a tudományos kutatás jelenleg aktuális célja, a közúti közlekedési folyamatok vizsgálata nagyméretű közúti közlekedési hálózatokon. Alapvető feladat egy új, a korábbiaknál hatékonyabb modell létrehozása a tetszőleges méretű dinamikus hálózati rendszerek leírására és irányítására.**

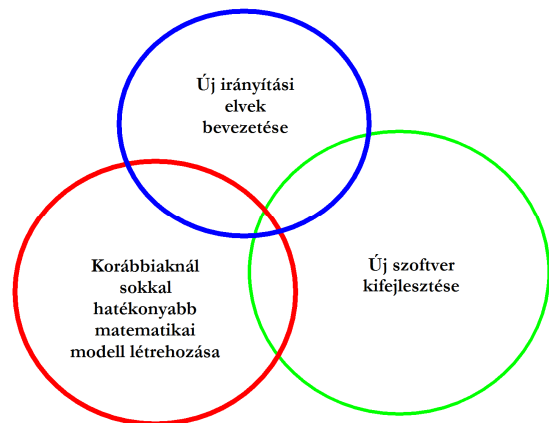
A kutatások eredményeinek alkalmazása különösen fontos a közúti közlekedési hálózatok fejlesztésének területén. Ennek során, meghatározandók azok az elemeket, amelyekből felépíthető bármely tetszőleges méretű közúti közlekedési rendszer. Megvizsgálandók az elemek közötti kapcsolatok (átadási kooperáció és befolyásolási kapcsolat) tulajdonságai. Definiálni kell a kapcsolatokat leíró hálózati hipergráfot és meg kell adni a felépítésének módját. Definiálni kell az új rendszer állapotjellemzőit. Meg kell adni, a hipergráf által definiált kapcsolati rendszerre és az új állapotváltozóra épülő nagyméretű nemlineáris dinamikus rendszer matematikai modelljét.

A fentiek alapján olyan 3D tervező rendszert szükséges létrehozni, amely alkalmas a modell automatikus felépítésére és a közúti közlekedési rendszerek optimalálására és optimális irányítására.

## 2. ÚJ ELVŰ MEGKÖZELÍTÉS A GLOBÁLIS KÖZÚTI HÁLÓZATI FOLYAMATOK LEÍRÁSÁRA.

A kutatás és fejlesztés céljai az 1. ábrán láthatók. A konferencia anyag közzététele az alábbi fő szempontokat szolgálja:

- Egy új szemléletmód bemutatása
- Az új modellezési technikában rejlő lehetőségek bemutatása
- Egy szuper szimulációs eszközt létrehozására irányuló tevékenység ismertetése



1. ábra: Cél: új hatékony modell, új irányítási törvények és új szoftver kifejlesztése

## 3. A HAGYOMÁNYOS MODELLEZÉSSSEL KAPCSOLATOS KRITIKAI MEGJEGYZÉSEK ÉS AZ ÚJ MODELLEBEN ALKALMAZOTT MÓDSZEREK

Az irodalomban a legtöbb bemutatott, közlekedési modell, ill. probléma, lényegét tekintve mindig egy-egy példa, és csak része a hálózatnak! A hagyományos modellezésnél tehát, egy adott feladat megoldása történik. Minden új probléma megoldás egy új példa megoldása lesz, amely során nem tudhatjuk, hogy a megoldással nem toltuk-e át a problémát egy másik területre?

Ez a hiányosság azonnal felveti a rész és az egész kérdését, amelyet Blaise Pascal így fogalmazott meg: „Minden természetes és láthatatlan kötelékkel kapcsolódik egymáshoz, amely összeköti a legtávolabb eső és a legkülönbözőbb dolgokat, lehetetlennek vélem, hogy megismerhessük a részeket az egész, s hasonlóképpen: az egészet a részek megismerése nélkül.”

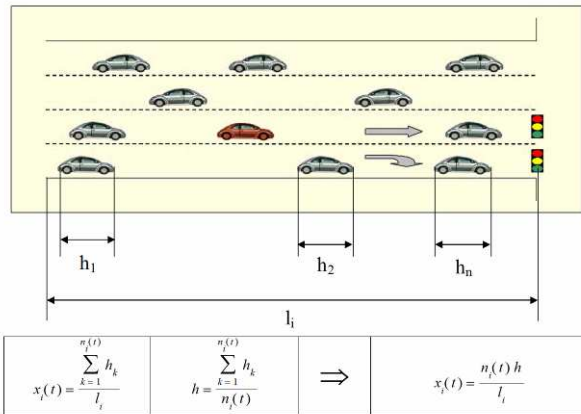


Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus, fizikus és gondolkodó

Matematikailag nem pontosak a járműsűrűség definíciók, amelyre a hagyományos modellek épülnek.

Az új modellben az állapotjellemző a  $t$  időpontban a térbeli lefedettség. Részletesebben, az a sűrűség, amely az egy szakaszon  $t$  időpontban tartózkodó járművek együttes

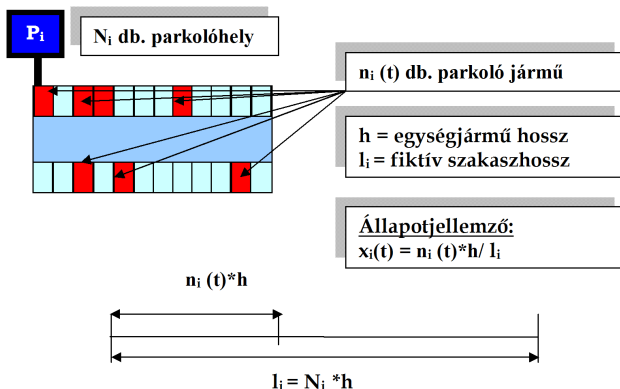
hosszának és a szakasz hosszának arányát méri, amely pontos geometriai fogalom.



2. ábra: az állapotjellemző a t időpontban a térbeli lefedettség

Egy globális hálózati modell nem tudna mit kezdeni, azzal, ahogy a hagyományos modellek a parkolókat, mint idegen elemeket kezelik.

Az új modellben a parkolók a hálózati rendszerben is dinamikusan működnek, és mint általánosított szakaszok vesznek részt. Nagyon fontos a parkolóknak az „ébersztő szerepe” a rendszerben, amely a globális hálózat tartományain a forgalmat napkezdetkor elindítja!

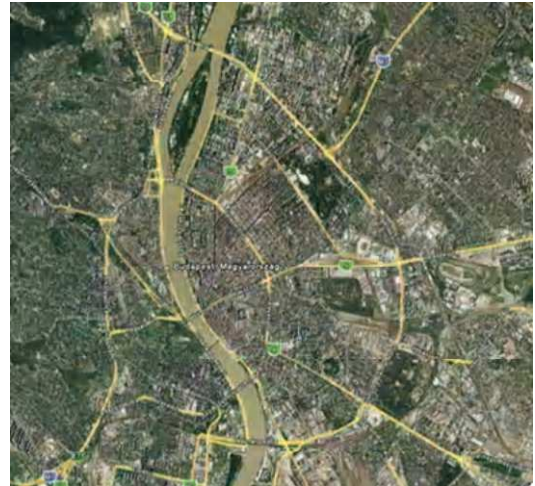


3. ábra: a parkolók általánosított szakaszok

A peremek problémája: A hagyományos modellek az inputokon és outputokon generált forgalmakat, illetve az outputokon bizonytalanul definiált forgalmat alkalmaznak. Ez a módszer mindenkor egy zárt tartományt tételez fel és nem vezet el a globális hálózati modellhez.

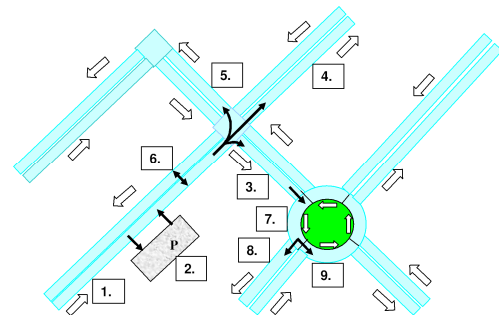
A most bemutatott új modell a teljes globális modellhez vezet el. Ennél, a külső tartományban is ugyanolyan elemek vannak, mint amilyenekből a belső tartományban elhelyezkedő rendszer épül fel, és ezek a külső elemek determinálják az input és output folyamatokat.

A hagyományos modelleknél a közlekedési hálózatot csomópontok és szakaszok halmazának tekintik és ez olyan irányított gráfot eredményez, amely hűségesen leutánozza a térképet: a gráf csúcsai a csomópontok, illetve kereszteződések, az ívek pedig az őket összekötő útszakaszok. 4. ábra.



4. ábra: térkép gráf modell

**Az új hálózati modellt ténylegesen más gráf írja le. A hálózati forgalom lebonyolítása valójában elemek (szakaszok) sokaságának a dinamikus kooperációja.** 5. ábra.



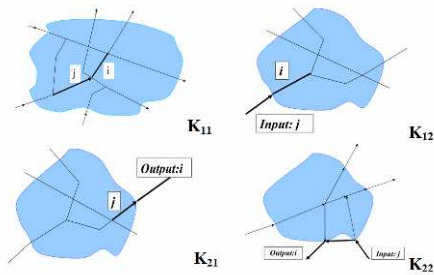
5. ábra

Az egész hálózatot tekintve, ténylegesen szakaszok kooperálnak szakaszokkal és ezek az elemek alkotják az irányított hálózati gráf csúcsait (a kooperálás általános szakaszok között, párhuzamos sávok és parkolók között történnek).

Az irányított gráf élei dinamikus relációk (ezek szétosztást, akadályozást, rásegítést, forgalmi lámpák működését, belső automatizmusokat és átadási sebességeket határoznak meg).

A szakaszok különböző paraméterekkel és kooperációs képességekkel rendelkeznek, amely képességek állapottól, külső feltételektől és az időponttól is függenek. Ezt a kapcsolatot írja le a kapcsolati hipermatrix. 6. ábra.

**A hálózat általános matematikai modelljének megalkotásához alapvető fontossággal bírt a hálózatot definiáló kapcsolati hipermatrix. [1,2,3].**



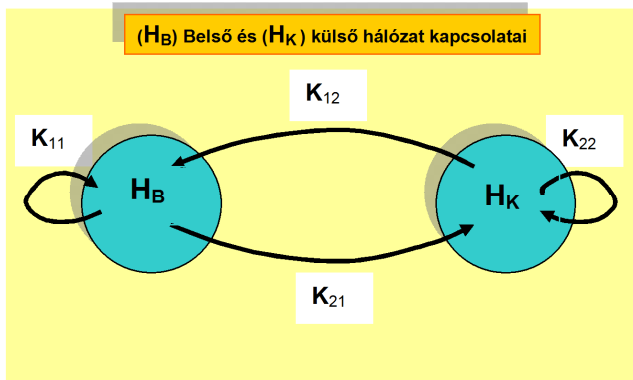
6. ábra: a belső és külső hálózat kapcsolatai hipermátrixa

A kapcsolati hipermátrix azt a dinamikus kapcsolatosságát adja meg, hogy milyen módon kooperál egy tetszőleges  $j$  szakasz tetszőleges  $i$  szakasszal.

Az  $n$  db. belső szakaszból álló, közlekedési hálózati modellünk írja le azt a közúti/városi közlekedési rendszert, amely egy  $G$  zárt görbével körülhatárolt  $H_B$  tartományában helyezkedik el.

A rendszer állapotjellemzői, rendre  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ .

A modell, a  $(H_K)$  külső tartományában elhelyezkedő hálózat azon részhálózatát is használja, amely olyan  $m$  db. szakaszból áll, amelyeknek közvetlen kapcsolatuk van valamely belső szakasszal. Az ezeken kialakuló járműsűrűségeket jelöli  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)$ , amelyeket **mérések alapján ismerünk**.



7. ábra: a belső és külső hálózat kapcsolatai

A módszer megengedi az input-outputok nélküli tetszőleges méretű, így pl. a Globális hálózatra történő kiterjesztést is. Ekkor  $H_K = 0$  üres, és csak  $H_B$  egyszerűen összefüggő tartomány létezik és benne elhelyezkedő hálózatnak csak belső kapcsolatai vannak.

Ugyanakkor, természetesen megengedett az is, hogy  $H_B$  nem egyszerűen összefüggő tartomány, az-az belsejében léteznek zárt görbével körülhatárolt tartományok, amelyek nem tartoznak hozzá, hanem  $H_K$ -hoz (pl. ha modellünkben az összes parkoló a külső hálózathoz tartozik).

#### 4. A HÁLÓZAT ÁLTALÁNOS MATEMATIKAI MODELLJE

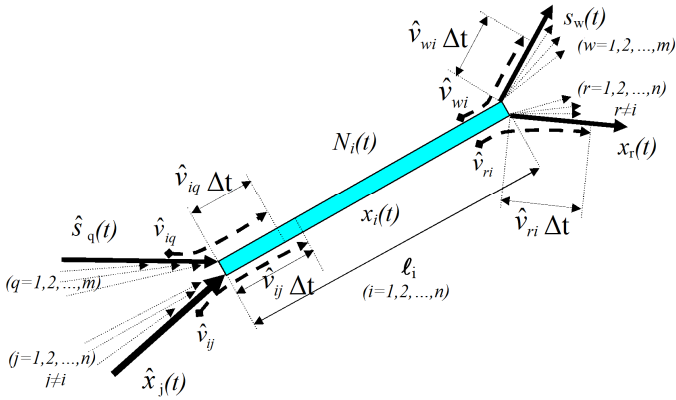
A matematikai modell pozitív nemlineáris (NL.) dinamikus rendszer vizsgálatához vezet. A modell lényegét tekintve, makroszkopikus modell.

Néhány, a kooperálással és a modellel kapcsolatos összefoglaló megjegyzés:

- A modellünkben  $0 \leq x_i(t) \leq 1$  normált forgalomsűrűség állapotjellemzőt használunk ( $i=1, \dots, n$ ). Az egy szakaszon, vagy szektorban tartózkodó járművek együttes hosszát osztjuk a szakasz hosszával. Ez a számítás alkalmazható a parkolók esetében is, így a parkolók is általánosított szakaszok a modellben.
- A modellezés tárgya egy NL. pozitív rendszer. A hálózaton változó sebességgel és  $\alpha_{ij}$ -vel jelölt ( $\alpha_{ij}$  általános esetben időtől függő  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(t)$ , vagy időtől és állapottól függő  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\mathbf{x}(t), t)$ ) szétosztási tényezőkkel, (rátákkal) áramlik a forgalom. A forgalmat a közúti járművek testesítik meg. A sebesség a forgalom sűrűségétől függ. Maximuma szakaszonként limitálva van. A sebesség függvényt befolyásolja még az időjárás, a látási viszonyok, az út geometriája, a domborzat, a minősége és a szélessége.
- $\beta_{ij}$  -vel jelöljük az egyes szakaszok átadásánál fellépő akadályozást  $0 \leq \beta_{ij} < 1$ , vagy rásegítést  $1 < \beta_{ij}$ . ( $\beta_{ij}$  általános esetben időtől függő  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(t)$ , vagy időtől és állapottól függő  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\mathbf{x}(t), t)$ .)
- $0 \leq u_{ij}(t) \leq 1$  kapcsolási függvény, az egyes szakaszok átadásánál működő forgalmi lámpák hatását veszi figyelembe.
- A párhuzamosan haladó szakaszok (sávok), továbbá szakaszok és parkolók is adnak át egymásnak járművet a hálózaton. Ezt az átadást  $0 \leq \gamma_{ij}(t)$ , vagy  $0 \leq \gamma_{ij}(x_i(t), x_j(t), t)$  arányossági függvény veszi figyelembe.
- Belső tiltó automatizmusok is működnek a hálózaton:  $j$ -ből nem adhatunk át  $i$ -re, ha  $i$  tele van ( $x_i(t) = 1 \Rightarrow S(x_i(t)) = 0$ ). Ugyancsak  $j$ -ből nem adhatunk át  $i$ -re, ha  $j$  üres ( $x_j(t) = 0 \Rightarrow E(x_j(t)) = 0$ ). A normált állapotjellemzők alkalmazásával ezek a feltételek egyszerűen teljesíthetőek. Ezek biztosítják a modellben azt, hogy nem veszünk el járművet onnan ahol nincs (sűrűség nem lép negatív tartományba) és nem adunk oda, ahol a sűrűség már elérte az 1-et.
- A hálózatot egy „G” zárt görbével körülkerített, nem feltétlenül egyszerűen összefüggő tartományban vizsgáljuk. Azon külső szakaszokon, amelyek közvetlen átadási, vagy átvételi kapcsolatban vannak valamely hálózati szakasszal, mérjük a normált  $0 \leq s_i(t) \leq 1$  forgalomsűrűséget ( $i=1, \dots, m$ ).

Tekintsünk egy zárt (nem feltétlen egyszerűen összefüggő) görbével körülkerített hálózatot. A tartomány definíciója megengedi, hogy pl. a parkolók egy része, vagy az összes parkoló a külső tartományhoz tartozzon. A 7. ábra szerint a hálózatot osztályoztuk, két diszjunkt hálózat létezik, a belső és a külső.

Tekintsük először a belső hálózat egy szakaszát:



8. ábra: *i*-ik belső szektor kapcsolatai

Ha egy *j* szakasz dolgozik *i*-re, a kapcsolati mátrix *i*-ik sor *j*-ik oszlopában fizikailag sebesség dimenziójú érték jelenik meg, amely a kapcsolati sebesség.

A  $\hat{v}_{ij}$  tényleges átadási sebesség egy szabályozott sebesség.

Ez az alábbiakat veszi figyelembe:  $S(x_i)$ ,  $E(x_j)$ , belső automatizmusok,  $V$  amely a csatlakozó szakaszok sűrűsége által van számítva,  $u_{ij}(t)$  lámpa jel és  $\beta_{ij}(x(t), t)$  akadályozás, vagy rásegítés:

$$\hat{v}_{ij} = S(x_i(t)) \cdot V(x_i(t), x_j(t)) \cdot E(x_j(t)) \cdot u_{ij}(t) \cdot \beta_{ij}(x(t), t)$$

A beáramló  $x_j$  sűrűségű anyag is szabályozott. Figyelembe veszi azt, hogy lehetséges, hogy *j* szakasz nem csak *i*-re dolgozik ugyanabban a *t* időpontban, ezért, a teljes mennyiség egy része áramlik *j*-re. Ezt egy  $\alpha_{ij}(x, t)$  állapot és idő függő faktor mutatja (pl. ilyen amikor egy parkoló két kimenetelén a szétosztás rátát adjuk meg). Jelentős anyagmennyiség kiáramlás eltérés lehet továbbá különböző időkben, ill. környezeti állapotjellemzők függvényében is. Ezt egy  $\gamma_{ij}(x, t)$  állapot és időfüggő faktor mutatja. (pl. ilyen, amikor egy parkolóból bizonyos időszakokban jelentős anyagáram megy ki, vagy párhuzamos sávoknál, egy *j*-ről *i*-re történő sáv váltási hajlandóságot befolyásol a sávok állapotjellemzője ill. az időszak is).

Az  $x_j$  sűrűségű anyagnál, a **tényleges**  $\hat{x}_j$  anyagmennyiség átadásánál ezt az alábbi módon vesszük figyelembe:

$$\hat{x}_j = \alpha_{ij}(x(t), t) \cdot \gamma_{ij}(x(t), t) \cdot x_j$$

A **sebesség és anyagmennyiség szabályozása egyszerre jelenik meg a kapcsolati mátrix  $v_{ij}$  elemében**, mivel a mátrix és állapotjellemző vektor szorzatában szereplő  $v_{ij} \cdot x_j$ , a forgalmat leíró szorzatoknak tényleges sebességeket és sűrűségeket kell figyelembe venni:

$$v_{ij} \cdot x_j = \hat{v}_{ij} \hat{x}_j = S(x_i(t)) \cdot V(x_i(t), x_j(t)) \cdot E(x_j(t)) \cdot$$

$$u_{ij}(t) \cdot \beta_{ij}(x(t), t) \alpha_{ij}(x(t), t) \cdot \gamma_{ij}(x(t), t) \cdot x_j$$

Igy adódik, hogy:

$$v_{ij} = S(x_i(t)) \cdot V(x_i(t), x_j(t)) \cdot E(x_j(t)) \cdot u_{ij}(t) \cdot \beta_{ij}(x(t), t) \cdot \alpha_{ij}(x(t), t) \cdot \gamma_{ij}(x(t), t)$$

Ki kell hangsúlyozni azon jól használható elvet, hogy az egy szektoron belül, adott *t* időpillanatban állandó sűrűséget és sebességet használunk. Ez megjelenik a [10. Papageorgeu] -modelleknél is diszkrét időintervallumokban.

Bármely *i* ( $i=1,2,\dots,n$ ) belső szektorra felírható az a differenciálegyenlet, amely meghatározza, hogy az  $x_i$  állapotjellemzője, hogy függ a többi belső és külső szektor állapotjellemzőjétől.

Inputok:

$$x_j: \Delta l_{ij} = \hat{v}_{ij} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta n_{ij} = \frac{\hat{v}_{ij} \cdot \Delta t \cdot \hat{x}_j}{h} \Rightarrow \Delta n1_i = \frac{\Delta t}{h} \sum_{j=1, (j \neq i)}^n v_{ij} \cdot x_j$$

$$s_q: \Delta l_{iq} = \hat{v}_{iq} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta n_{iq} = \frac{\hat{v}_{iq} \cdot \Delta t \cdot \hat{s}_q}{h} \Rightarrow \Delta n2_i = \frac{\Delta t}{h} \sum_{q=1}^m v_{iq} \cdot s_q$$

Outputok:

$$x_i: \Delta l_{ri} = \hat{v}_{ri} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta n_{ri} = \frac{\hat{v}_{ri} \cdot \Delta t \cdot \hat{x}_i}{h} \Rightarrow \Delta n3_i = \frac{\Delta t}{h} \sum_{r=1, (r \neq i)}^n v_{ri} \cdot x_i$$

$$s_w: \Delta l_{wi} = \hat{v}_{wi} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta n_{wi} = \frac{\hat{v}_{wi} \cdot \Delta t \cdot \hat{x}_i}{h} \Rightarrow \Delta n4_i = \frac{\Delta t}{h} \sum_{w=1}^m v_{wi} \cdot x_i$$

$$\Delta N_i = [\Delta n1_i + \Delta n2_i] - [\Delta n3_i + \Delta n4_i]$$

$$N_i(t + \Delta t) = N_i(t) + \Delta N_i$$

$$N_i(t + \Delta t) = N_i(t) + \frac{\Delta t}{h} \left[ \sum_{j=1, (j \neq i)}^n v_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{q=1}^m v_{iq} \cdot s_q(t) - \left( \sum_{r=1, (r \neq i)}^n v_{ri} \cdot x_i(t) + \sum_{w=1}^m v_{wi} \cdot x_i(t) \right) \right]$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_i(t + \Delta t) - N_i(t)}{\Delta t} = \frac{1}{h} \left[ \sum_{j=1, (j \neq i)}^n v_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{q=1}^m v_{iq} \cdot s_q(t) - \left( \sum_{r=1, (r \neq i)}^n v_{ri} + \sum_{w=1}^m v_{wi} \right) x_i(t) \right]$$

$$\dot{N}_i(t) = \frac{1}{h} \left[ \sum_{j=1, (j \neq i)}^n v_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{q=1}^m v_{iq} \cdot s_q(t) - \left( \sum_{r=1, (r \neq i)}^n v_{ri} + \sum_{w=1}^m v_{wi} \right) x_i(t) \right]$$

$$x_i(t) = \frac{N_i(t) \cdot h}{l_i} \Leftrightarrow N_i(t) = \frac{x_i(t) \cdot l_i}{h}$$

$$\dot{N}_i(t) = \frac{\dot{x}_i(t) \cdot l_i}{h}$$

$$\frac{\dot{x}_i(t) \cdot l_i}{h} = \frac{1}{h} \left[ \sum_{j=1, (j \neq i)}^n v_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{q=1}^m v_{iq} \cdot s_q(t) - \left( \sum_{r=1, (r \neq i)}^n v_{ri} + \sum_{w=1}^m v_{wi} \right) x_i(t) \right]$$

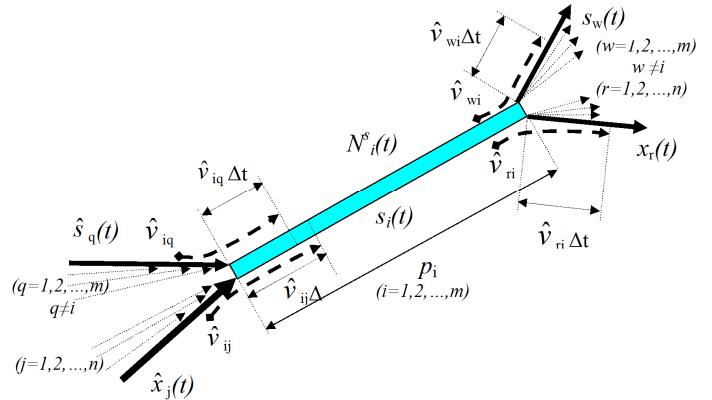
$$\dot{x}_i(t) = \frac{1}{l_i} \left[ \sum_{j=1; (j \neq i)}^n v_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{q=1}^m v_{iq} \cdot s_q(t) - \left( \sum_{r=1; (r \neq i)}^n v_{ri} + \sum_{w=1}^m v_{wi} \right) x_i(t) \right]$$

$$v_{ij} = S(x_i(t)) \cdot V(x_i(t), x_j(t)) \cdot E(x_j(t)) \cdot \alpha_{ij}(x(t), t) \cdot \beta_{ij}(x(t), t) \cdot \gamma_{ij}(x(t), t) \cdot u_{ij}(t)$$

$$v_{iq} = S(x_i(t)) \cdot V(x_i(t), s_q(t)) \cdot E(s_q(t)) \cdot \alpha_{iq}(x(t), t) \cdot \beta_{iq}(x(t), t) \cdot \gamma_{iq}(x(t), t) \cdot u_{iq}(t)$$

$$v_{ri} = S(x_r(t)) \cdot V(x_r(t), x_i(t)) \cdot E(x_i(t)) \cdot \alpha_{ri}(x(t), t) \cdot \beta_{ri}(x(t), t) \cdot \gamma_{ri}(x(t), t) \cdot u_{ri}(t)$$

$$v_{wi} = S(s_w(t)) \cdot V(s_w(t), x_i(t)) \cdot E(x_i(t)) \cdot \alpha_{wi}(x(t), t) \cdot \beta_{wi}(x(t), t) \cdot \gamma_{wi}(x(t), t) \cdot u_{wi}(t)$$



10. ábra: i-ik külső szektor kapcsolatai

$$\sum_{r=1; (r \neq i)}^n \alpha_{ri} + \sum_{w=1}^m \alpha_{wi} = 1$$

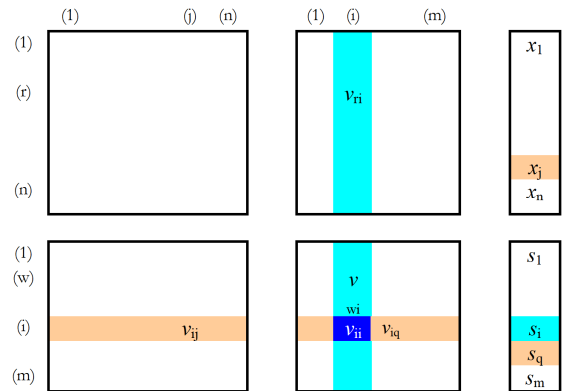
$$\dot{s}_i(t) = \frac{1}{p_i} \left[ \sum_{j=1}^n v_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{q=1; (q \neq i)}^m v_{iq} \cdot s_q(t) - \left( \sum_{r=1}^n v_{ri} + \sum_{w=1; (w \neq i)}^m v_{wi} \right) s_i(t) \right]$$

$$v_{ii} = - \left[ \left( \sum_{r=1; (r \neq i)}^n v_{ri} + \sum_{w=1}^m v_{wi} \right) \right]$$

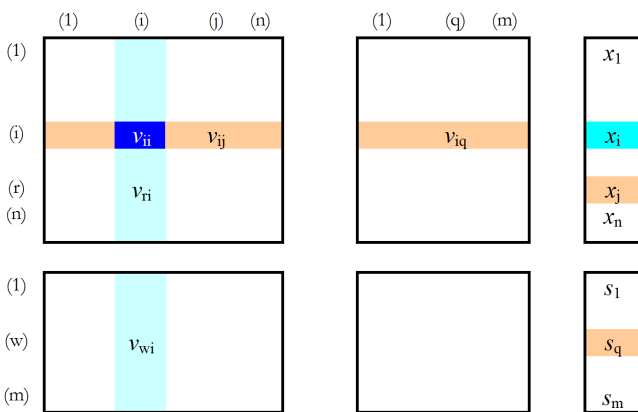
A hálózat működését a kapcsolati mátrix foglalja egy rendszerbe.

A kapcsolati mátrix egyrészt megadja bármely szektor esetében, hogy milyen más szektorokkal áll átadási kapcsolatban, másrészt a kapcsolati mátrixot tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer írja le a hálózat minden szektorának is a működését, az-az a teljes hálózat működését. A belső szektorokra ez az alábbi módon:

A kapcsolati mátrix külső szektorokra pedig az alábbi módon alakul:



11. ábra: i-ik külső szektor kapcsolatai mátrixos formában



9. ábra: i-ik belső szektor kapcsolatai mátrixos formában

Bármely i (i=1,2,...,m) külső szakaszra szintén felírható az a differenciálegyenlet, amely meghatározza, hogy az s<sub>i</sub> állapotjellemzője, hogy függ a többi belső és külső szektor állapotjellemzőjétől: 10. ábra.

A belső és külső hálózat működését leíró globális hálózati modell a fenti levezetések alapján a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle L \rangle^{-1} \\ \langle P \rangle^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$$

Ahol:  $\langle L \rangle$  és  $\langle P \rangle$  a szektorok hosszát tartalmazó diagonális mátrixok:

$$\langle L \rangle = \langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle, \quad \langle P \rangle = \langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle$$

x a belső szektorok állapotjellemző vektora,

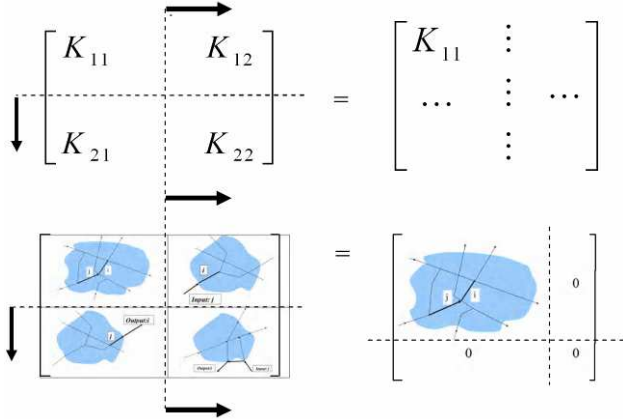
s a külső szektorok állapotjellemző vektora,

$\dot{x}$  a belső szektorok állapotjellemző vektorának idő szerinti deriváltja,

$\dot{s}$  a külső szektorok állapotjellemző vektorának idő szerinti deriváltja,

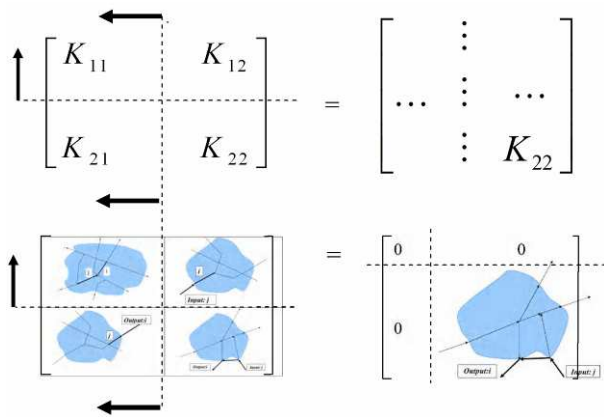
A hálózat mérete tetszőleges, a K<sub>11</sub> mátrixok mérete két irányban módosítható, vagy mindaddig, amíg K<sub>22</sub> el nem

tűnik, vagy addig, amíg a  $K_{11}$  mátrix el nem tűnik. Mindkét eset ekvivalens, megkapjuk az autonóm Globális modellt. Ennek a modellnek már nincs inputja-outputja (ha a parkolók is a belső tartományban vannak) a modellt a parkolók és útszakaszok közötti kooperációt biztosító gamma függvények „ébresztik” fel, a hálózat azon tartományán, ahol reggel beindul a forgalom.



12. ábra:  $K_{11}$  növelése

Másképp fogalmazva, a Föld felszínén létező globális hálózathoz jutunk el, ha a  $H_B$  belső hálózatot tartalmazó tartományát addig növeljük, amíg a  $H_K$  tartomány üres halmazzá nem válik (ezzel ekvivalens az, ha a  $H_K$  külső hálózatot tartalmazó tartományát addig növeljük, amíg a  $H_B$  tartomány üres halmazzá nem válik).



13. ábra:  $K_{22}$  növelése

Ekkor minden szektor a belső hálózathoz tartozik. Az előbbi felírás szerint mindenkor  $n$  jelöli a belső szektorok és  $m$ , a külső szektorok számát, és mivel most  $m=0$ , ezért az  $n$  szektort veszünk figyelembe.

A globális hálózat egyenlete az alábbi differenciálegyenletrendszer, amely pozitív rendszer, a  $K_{11}$  mátrix Metzler mátrix. Az ilyen rendszerek matematikai vizsgálata rendkívül izgalmas és modern terület.

$$\dot{x} = \langle L \rangle^{-1} K_{11}(x)x$$

Ahol:

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

$$v_{ii} = - \left( \sum_{r=1; (r \neq i)}^n v_{ri} \right)$$

	(1)	(2)	(i)	(n-1)	(n)
(1)	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{1i}$	$v_{1n-1}$	$v_{1n}$
(2)	$v_{21}$	$v_{22}$			
(i)			$v_{ii}$		
(r)	$v_{r1}$	$v_{r2}$	$v_{ri}$	$v_{rn-1}$	$v_{rn}$
(n-1)				$v_{n-1n-1}$	
(n)	$v_{n1}$	$v_{n2}$	$v_{ni}$	$v_{nn-1}$	$v_{nn}$

14. ábra:  $K_{11}$  elemei

Ahol:

$$v_{11} = - \left( \sum_{r=1; (r \neq 1)}^n v_{r1} \right)$$

$$v_{22} = - \left( \sum_{r=1; (r \neq 2)}^n v_{r2} \right)$$

$$v_{n-1n-1} = - \left( \sum_{r=1; (r \neq n-1)}^n v_{rn-1} \right)$$

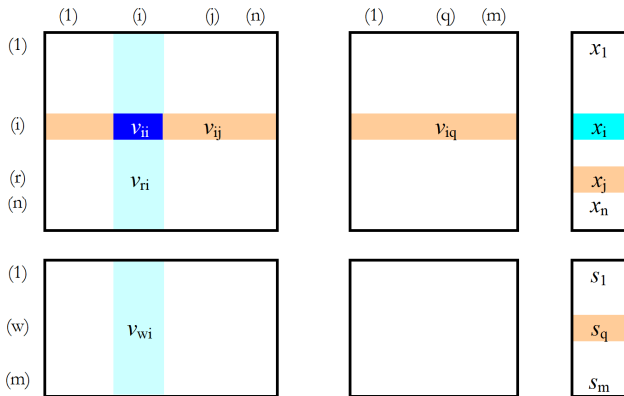
$$v_{nn} = - \left( \sum_{r=1; (r \neq n)}^n v_{rn} \right)$$

A most tárgyalt globális modell leegyszerűsíthető tetszőleges méretű hálózatra is, ekkor a külső  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , sűrűségű szektorok csak azok lesznek, amelyek közvetlen kapcsolatokkal rendelkeznek valamely belső szektorral, és ezek állapotát mérés alapján ismertnek tekintjük. Ennél a modellnél, a kapcsolati hipermátrixot alkotó mátrixok közül, csak a  $K_{11}$  és  $K_{12}$  mátrixok játszanak szerepet, mert általuk képviselve van minden átadás, amely a belső szektorokra vonatkozik! Írjuk fel a modellünk differenciálegyenlet-rendszerét:

$$\dot{x} = \langle L \rangle^{-1} [K_{11}(x) x + K_{12}(x, s) s]$$

Itt is érvényesül, hogy a hálózat működését a  $K_{11}$  és  $K_{12}$  kapcsolati mátrixok foglalják egy rendszerbe. A kapcsolati mátrixok egyrészt megadják bármely szektor esetében, hogy milyen más szektorokkal áll kapcsolatban, másrészt a kapcsolati mátrixokat tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer írja le a hálózat minden szektorának is a működését, az-az a teljes hálózat működését.

A belső szektorokra az alábbi módon:



15. ábra  $K_{11}$  és  $K_{12}$  szerepe

### A modell stabilitásának vizsgálata a Ljapunov függvény alkalmazásával.

Vezessük be a:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + \dots + l_n \cdot x_n$$

függvényt, amelynél  $0 < l_i$ , az  $x_i$  állapotjellemzőhöz tartozó szakasz hosszát jelenti.

Röviden  $\underline{L} = [l_1, l_2, \dots, l_n]$  és  $\underline{x}$  skaláris szorzata:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{L} \cdot \underline{x}$$

A  $V(\underline{x})$  skalár-vektort függvény pozitív definit, mert:

$$V(\underline{x}) = 0, \text{ csak ha } \underline{x} = \underline{0}$$

$V(\underline{x}) > 0$ , értelmezési tartományában minden nemzérus  $\underline{x}$ -re.

Képezzük a  $W$  függvényt:

$$\begin{aligned} W &= dV(\underline{x})/dt = (\partial V / \partial x_1)(dx_1/dt) + \dots + (\partial V / \partial x_n)(dx_n/dt) = \\ &= l_1 \cdot dx_1/dt + l_2 \cdot dx_2/dt + \dots + l_n \cdot dx_n/dt = \underline{L} \cdot \underline{\dot{x}} \\ W(\underline{\dot{x}}(t)) &= \underline{L} \cdot \underline{\dot{x}}(t) \end{aligned}$$

### A Ljapunov függvény fizikai jelentésére

Vizsgáljuk meg a  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + \dots + l_n \cdot x_n$  függvény fizikai jelentését.

A definíciónk szerint:  $x_i = N_i \cdot h / l_i$

ahol:  $N_i$  az  $i$ -ik szakaszon tartózkodó járművek száma  
 $h$  egységjármű hossz

$N_i \cdot h / l_i$  helyettesítés után:

$$V(t) = (N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_n(t)) \cdot h$$

a tartományban tartózkodó összes jármű számával arányos. Pontosabban:  $V$  az adott  $t$  időpontban a belső úthálózaton a járművek által elfoglalt összes úthosszat adja meg. Tehát,  $V(t)$   $t$ -szerinti deriváltjának negatív értéke, az összes jármű szám csökkenését, illetve az elfoglalt összes úthossz csökkenését jelenti a belső úthálózaton.

Ha  $V(t)$   $t$ -szerinti deriváltjának értéke zérus, akkor nem változik a járművek által elfoglalt összes úthossz, ha a  $V(t)$   $t$ -szerinti deriváltjának értéke pozitív, akkor növekszik a járművek által elfoglalt összes úthossz.

Tehát:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = L \cdot \dot{x}$$

Ahol:

$$L = [l_1, l_2, \dots, l_n] \text{ és } \dot{x} = \langle L \rangle^{-1} K_{11}(x)x$$

Ekkor:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = L \cdot \langle L \rangle^{-1} K_{11}(x)x$$

A fenti összefüggésben az  $L \cdot \langle L \rangle^{-1}$  szorzat  $n$  dimenziós összegző vektor:

$$L \cdot \langle L \rangle^{-1} = [1, 1, \dots, 1]$$

Ezzel szorozva  $K_{11}(x)$  kapcsolati mátrixot  $n$  dimenziós zérus vektort kapunk a  $K_{11}(x)$  konstrukciója miatt (mivel a  $K_{11}(x)$  főátlójában lévő bármely  $i$ -ik elem az  $i$ -ik oszlop főátlón kívüli elemek összegének ellentettje és a teljes oszlopösszegben mindig a főátlón kívüli elemek és a főátlóbeli elem összege jelenik meg, ami zérus:

$$[1, 1, \dots, 1] \cdot K_{11}(x) = [0, 0, \dots, 0]$$

Végül, a zérus vektor és  $x$  vektor skaláris szorzata is minden esetben zérus skalár. Tehát, a globális hálózaton – ha csupán a hagyományos, állandó járműszám mellett tekintjük a közlekedési áramlatokat akkor:

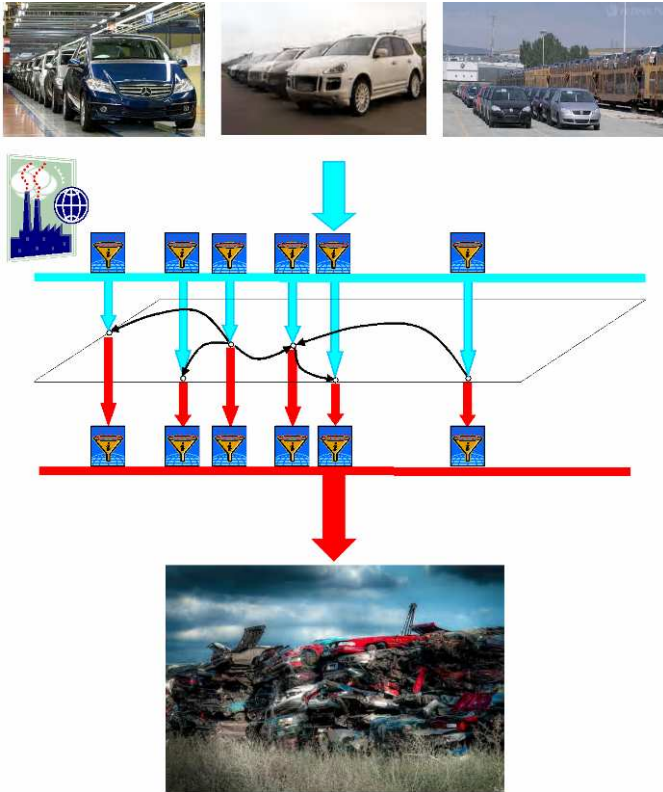
$$\frac{\partial V}{\partial t} \equiv 0$$

Ezzel szemben, a valóságos helyzet más! Az autógyárak folyamatos termelése beszállítóként jelenik meg a hálózaton: együttes hatásuk szerint olyan forrás-sektorként, amely elvben bármely más szektorral kapcsolatban áll, arra rászállíthat, - azonban ez a hiány nála, mint szektornál nem jelentkezik! Ezt a szektort elvben bármelyik sorszámmal megjelölhetjük, jelöljük a  $n+1$ -ik szektornak.

Ezzel egy időben, működik a hálózatban egy nyelő-sektor is, amely az amortizált, használatból kivont járműveket fogadja



be folyamatosan, anélkül, hogy megtelne. A hálózat síkjában lehelyezkedő szektorokra tehát befolyik az új járműáradat, de ezek ki is vannak „lyukasztva” és itt ki is folynak az amortizált járművek, (16. ábra).



16. ábra: autógyárak beszállítása és az amortizáció a hálózaton

Milyen változást idéz elő ez a két szektor a  $K_{11}(x)$  kapcsolati mátrixban? (17. ábra).

Az  $n+1$ -ik oszlopban jelennek meg azok a nem negatív átadási sebességek, amelyekkel a forrás szektor átadási kapcsolatba lép az 1, 2, ...,  $n$ -ik szektorokkal, rendre  $v_{1,n+1}$ ,  $v_{2,n+1}$ , ...,  $v_{r,n+1}$ , ...,  $v_{n,n+1}$ . Ezek a járművek a szektorokba úgy lépnek be, hogy nem a forgalomban együttműködő szektorok valamelyikéről áramlanak be, tehát nem forgalomból kerülnek be, ez által sértik az anyagmegmaradás törvényét. A forrás-sektornál az elvételekből nem jelentkezik hiány, mindig pótolja a gyártó a kiszállítást, ezért a  $v_{n,n+1}=0$ . A modellben ez egy olyan speciális parkoló, amelynek mindig 1 a sűrűsége.

Nézzük a nyelő szektor szerepét. Erre bármely szektor szállíthat járművet, az 1,2,..., $n$ -ik szektorok, rendre  $v_{1,A}$ ,  $v_{2,A}$ ,  $v_{r,A}$ ,  $v_{n,A}$  nem negatív átadási sebességekkel. Ezek veszteségek az egyes szektoroknál, tehát a főatlóban egy további negatív tagként szerepelnek. Ezek a járművek a szektorokból úgy lépnek ki, hogy nem a forgalomban együttműködő szektorok valamelyikére áramlanak, tehát nem a forgalomba kerülnek, ez által szintén sértik az anyagmegmaradás törvényét.

A  $K_{11}$  kapcsolati mátrix tehát az alábbi:

	(1)	(2)	(i)	(n-1)	(n)	(n+1)	
(1)	$v_{11}^*$	$v_{12}$	$v_{1i}$	$v_{1,n-1}$	$v_{1n}$	$v_{1,n+1}$	$x_1$
(2)	$v_{21}$	$v_{22}^*$				$v_{2,n+1}$	
(i)			$v_{ii}^*$				$x_i$
(r)	$v_{r1}$	$v_{r2}$	$v_{ri}$	$v_{r,n-1}$	$v_{rn}$	$v_{r,n+1}$	
(n)	$v_{n1}$	$v_{n2}$	$v_{ni}$	$v_{n,n-1}$	$v_{nn}^*$	$v_{n,n+1}$	$x_n$
(n+1)						0	$x_{n+1}$

17. ábra:  $K_{11}$  elemei

Ahol:

$$v_{11}^* = -\left(\sum_{r=1;(r \neq 1)}^n v_{r1}\right) - v_{1A}$$

$$v_{22}^* = -\left(\sum_{r=1;(r \neq 2)}^n v_{r2}\right) - v_{2A}$$

$$v_{i,i}^* = -\left(\sum_{r=1;(r \neq i)}^n v_{ri}\right) - v_{i,A}$$

$$v_{nn}^* = -\left(\sum_{r=1;(r \neq n)}^n v_{rn}\right) - v_{n,A}$$

Ebben az esetben az  $L \cdot \langle L \rangle^{-1}$  szorzat  $n+1$  dimenziós összegző vektor:

$$L \cdot \langle L \rangle^{-1} = [1, 1, \dots, 1]$$

Ezzel szorozva  $K_{11}(x)$  ( $n+1 \times n+1$ )-es kapcsolati mátrixot az alábbi  $n+1$  dimenziós vektort kapjunk:

$$[1, 1, \dots, 1] \cdot K_{11} = \left[-v_{1,A}, -v_{2,A}, \dots, -v_{n,A}, \sum_{r=1}^n v_{r,n+1}\right]$$

a  $K_{11}(x)$  eredeti konstrukciója miatt rendre most is zérus elemek lennének, de az amortizáció miatti veszteségek következtében az első  $n$  helyen fellépnek a  $-v_{1,A}$ ,  $-v_{2,A}$ , ...,  $-v_{n,A}$  átadási sebességekkel, valamint az  $n+1$ -ik helyen fellép a

szektorokra történő beszállítások következtében a  $\sum_{r=1}^n v_{r,n+1}$  sebesség.

Végül ezen vektor és  $x$  vektor skaláris szorzata mint skalár adja a Ljapunov függvény deriváltját:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left[ -v_{1,A}, -v_{2,A}, \dots, -v_{n,A}, \sum_{r=1}^n v_{r,n+1} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

Az-az:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{r=1}^n v_{r,n+1} \cdot x_{n+1} - \sum_{i=1}^n v_{i,A} x_i > 0$$

Meg is adható jó közelítéssel a Ljapunov függvény deriváltja a globális hálózatra:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx 2,77 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Tehát, a globális hálózaton ténylegesen az állandó járműszám-növekedés mellett történő közlekedési áramlatokat kell vizsgálni! Erre utal áttételesen a motorizációs ráta is, amely növekvő Föld-népeséghez viszonyítva is növekszik!

A hálózat változást a globális mátrix  $n,m$  méret-indexeinek időtől történő függőségével adhatjuk meg.

**Végül, vizsgáljuk a Ljapunov stabilitást egy  $G$  görbe által lehatárolt hálózatra**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = L \cdot \dot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = L \cdot \langle L \rangle^{-1} [K_{11}(x) x + K_{12}(x, s) s]$$

Az  $L \cdot \langle L \rangle^{-1}$   $n$  dimenziós összegző vektorral

$$L \cdot \langle L \rangle^{-1} = [1, 1, \dots, 1]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = [1, 1, \dots, 1] \cdot [K_{11}(x) x + K_{12}(x, s) s]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = [1, 1, \dots, 1] \cdot K_{11}(x) x + [1, 1, \dots, 1] \cdot K_{12}(x, s) s$$

Az első  $[1, 1, \dots, 1] \cdot K_{11}(x) x$  szorzatot vizsgálva, ennél, a  $K_{11}(x)$  eredeti konstrukciója miatt rendre most is zérus elemek lennének, de az főátlóbeli  $i$ -ik elemeknél rendre megjelentek a  $K_{13}$  kapcsolati mátrix  $i$ -ik oszlopában elhelyezkedő elemek összegének ellentettjei is  $-\sum_{w=1}^m v_{wi}$ , tehát a  $K_{11}$  főátlójában szereplő  $v_{ii}$  elemek ( $i=1,2, \dots, n$ ):

$$v_{ii} = - \left[ \left( \sum_{r=1; (r \neq i)}^n v_{ri} + \sum_{w=1}^m v_{wi} \right) \right]$$

Ez alapján:

$$[1, 1, \dots, 1] \cdot K_{11} = \left[ -\sum_{w=1}^m v_{w1}, -\sum_{w=1}^m v_{w2}, \dots, -\sum_{w=1}^m v_{wn} \right]$$

Ennek a vektornak  $x$  vektorral alkotott skaláris szorzata adja a Ljapunov függvény deriváltjának első tagját:

$$\left[ -\sum_{w=1}^m v_{w1}, -\sum_{w=1}^m v_{w2}, \dots, -\sum_{w=1}^m v_{wn} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = - \left( \sum_{w=1}^m v_{w1} \cdot x_1 + \sum_{w=1}^m v_{w2} \cdot x_2 + \dots + \sum_{w=1}^m v_{wn} \cdot x_n \right)$$

Az  $[1, 1, \dots, 1] \cdot K_{12}(x, s) s$  második tag első két tényezőjének szorzata a  $K_{12}$  kapcsolati mátrix  $i$ -ik oszlopában elhelyezkedő elemek összegét adja:

$$[1, 1, \dots, 1] \cdot K_{12} = \left[ \sum_{i=1}^n v_{i1}, \sum_{i=1}^n v_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n v_{im} \right]$$

Ez utóbbi vektor és  $s$  vektor skaláris szorzata adja a Ljapunov függvény deriváltjának második tagját:

$$\left[ \sum_{i=1}^n v_{i1}, \sum_{i=1}^n v_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n v_{im} \right] \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n v_{i1} \cdot s_1 + \sum_{i=1}^n v_{i2} \cdot s_2 + \dots + \sum_{i=1}^n v_{im} \cdot s_m$$

Végül, a két tag összege adja a Ljapunov függvény deriváltját:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \left( \sum_{w=1}^m v_{w1} \cdot x_1 + \sum_{w=1}^m v_{w2} \cdot x_2 + \dots + \sum_{w=1}^m v_{wn} \cdot x_n \right) + \sum_{i=1}^n v_{i1} \cdot s_1 + \sum_{i=1}^n v_{i2} \cdot s_2 + \dots + \sum_{i=1}^n v_{im} \cdot s_m$$

Tehát a rendszer stabilis, ha a peremeken a kiszállítás nagyobb, mint a peremeken történő beszállítás (18. ábra).

Röviden:

$$\sum F_{input} < \sum F_{output}$$

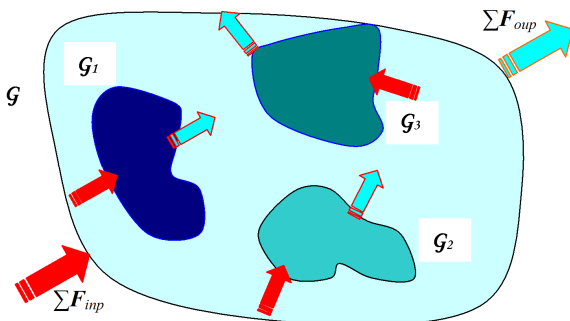
Az autonóm rendszer viszont mindig stabilis, ekkor ugyanis:

$$s_1 := 0 \quad s_2 := 0 \quad s_m := 0$$

mivel a szummákban szereplő sebességek nem negatívak.

Ez a vizsgálati eredmény, a **Ljapunov függvényt alkalmazó irányítási törvényt ad meg**, amely elégséges feltételt ad a rendszer aszimptotikus stabilitására és dinamikusan alkalmazható a teljes tartományon, ill. azokon a szubtartományokon, ahol kritikus helyzet lép fel. Az irányítás, a peremeken kifele mutató  $\sum F_{output}$  és a peremeken befelé mutató  $\sum F_{input}$  összes fluxus számítása alapján történik és az alábbi feltétel teljesítését írja elő:

$$\sum F_{input} \leq \sum F_{output}$$



18. ábra: Ljapunov függvényt alkalmazó irányítási törvény a tartományon, ill. szubtartományok

**A módszer tartományon történő optimális forgalomsűrűség fenntartására alkalmas és közvetlen kapcsolatba hozható a környezeti hatások optimalálásával is. További alkalmazási területe a csomópontok irányítása**, a csomópontot körülkerítő zárt görbével határolt tartományon keresztül időegységenként, a maximális járműszám átáramlásának biztosítása. Ez új szabályzási irányt szab. Pl. a tartományban elhelyezkedő csomópontok optimalása szükséges, de nem elégséges feltétele a forgalom optimalálásának. A tartomány „mögött” is kialakulhat torlódás és hiba, ha ezt nem vesszük figyelembe.

Ily módon az intelligens hálózatokat központi irányító rendszerek tartomány szinten irányítják és új elven történik a csomópontok irányítása is. Azonnal reagáló rendszerek kell,

hogy működjenek, változtatható irányú sávok és intelligens jelzőlámpák alkalmazásával. Döntően tehát, az információ- és kommunikációs technológia segítségével növelhető a közlekedés kapacitása. A kitérés iránya, az innováció! A közlekedésszervezést tehát a jövőben intelligens, a forgalmi helyzetet hálózati szinten valós időben nyomon követő, és azonnal reagáló rendszerek bevezetésével kell fejleszteni amely az adott körülményeknek megfelelően irányítja már a hálózati folyamatokat.

## ÖSSZEFOGLALÁS

Az intelligens hálózatok megvalósításához (tetszőleges méretű, zárt görbe által körülhatárolt, közúti közlekedési hálózati rendszerek matematikai modellezésére) speciális, hipergráf struktúrát dolgoztunk ki amely leírja egy tartomány esetén, a belső-belső, a külső-belső, a belső-külső és a külső-külső hálózati elemek közötti kapcsolatrendszerét és az átadási törvényt. [1.,2., Péter T., Bokor J.]. A modellt kiterjesztettük globális hálózati modellé is. Vizsgálataink során, megadtuk az állapottérben, a rendszer működését leíró nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert. Bemutattuk, hogy a rendszer pozitív rendszer. Ljapunov függvények módszerével bizonyítottuk, hogy az autonóm rendszer aszimptotikusan stabilis. A nem autonóm rendszerre, a peremekre vonatkozó, Ljapunov függvényt alkalmazó irányítási törvényt adtunk meg, amely elégséges feltételt ad a rendszer aszimptotikus stabilitására és dinamikusan alkalmazható a teljes tartományon, ill. azokon a szubtartományokon, ahol kritikus helyzet lép fel. [3, Péter T.] A tárgyalt modell alkalmazható a nagyméretű közúti közlekedési hálózatok, tervezésére és a közlekedési rendszerek szabályozására. A közlekedési áramlatok modellezése terén új eredményeket értünk el a nagyméretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok tartományokra vonatkozó optimális irányításának vizsgálata és a probléma gyakorlati megoldása területén. A létrehozott új modell, az egész hálózatot vizsgálja a teljes kapcsolatrendszer mellett. Ebben önálló elemként már nem jelenik meg a „csomópont”, ugyanis minden csomópont működése, része a teljes kapcsolatrendszernek! A hálózatban ténylegesen általánosított szakaszok kooperálnak és ezek az elemek alkotják a hálózati gráf csúcsait. Az irányított gráf élei állapotfüggő dinamikus relációk. Ez a gráf-struktúra a folyamatok leírásánál pozitív nemlineáris dinamikus rendszert eredményezett és igen hatékony eszköznek bizonyult. Fontos kérdéskör a modellek 3D szimulációs szoftverének fejlesztése is. [4.,5., Péter T., Stróbl A., Fazekas S.]. Az új modell alkalmas a tetszőleges méretű közúti hálózat bármely részhálózatán kialakított megfordítható irányú közlekedési rend vizsgálatára is. Ez egy új elvű optimális irányításra ad lehetőséget, amely a hálózati gráf struktúrájának dinamikus változtatásával történik. A modellben, ahogy a valóságban is, a szóban forgó geometriai elemek természetesen nem szűnnek meg, de új funkciójuk és kapcsolatrendszerük következtében egy variábilis hálózatot alkotnak. Modellünk ugyan speciális makroszkopikus modell, azonban, az egyedi jármű-mozgások és a várható célba érési idők számítására is alkalmazható a hálózaton történő áthaladásokhoz optimális trajektóriák, illetve környezeti terhelések meghatározására. [6., Péter T., Bede

Zs.], [7..T. Peter, M. Basset], [8., Zs. Bede, G. Szabo, T. Peter], [9., Zs. Bede, T. Peter].  
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS:

A munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az **Új Széchenyi Terv** TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.  
A cikkben bemutatott kutatásokat az OTKA CNK 78168 pályázat támogatta

## IRODALOM

- [1] Péter T., Bokor J.: Járműforgalmi rendszerek modellezése és irányításának kutatása. A jövő járműve, Bp, 06, 1-2 pp. 19-23.
- [2] Dr. Péter T., Dr. Bokor J.: Nagy méretű közúti közlekedési hálózatok nemlineáris modelljének kapcsolati hipermátrixa, A jövő járműve, 1-2. Budapest, 2007
- [3] Péter T. Intelligens közlekedési rendszerek és járműkontroll. Előírások a közlekedés biztonságának növelésére. Bp. 2005. pp. 1-465. Magyar Mérnökakadémia Symposium.
- [4] Dr. Péter T., Stróbl A., Fazekas S.: Hazai szoftverfejlesztés a nagyméretű közúti közlekedési hálózatok folyamatanalízisére, Budapest, 2007 Magyar Mérnökakadémia: Innováció és Fenntartható Felszíni Közlekedés Konferencia 1. szekció <http://kitt.uni-obuda.hu/mmaws/>
- [5] Dr. Péter T., Stróbl A., Fazekas S. Speciális matematikai modellt alkalmazó szoftver, optimális útvonalak meghatározására. Budapest, 2009. Magyar Mérnökakadémia: Innováció és Fenntartható Felszíni Közlekedés Konferencia IFFK 2009. 1. szekció <http://kitt.uni-obuda.hu/mmaws/>
- [6] Dr. Péter T., Bede Zs. Egyedi sebességfolyamatok kinyerése, nagyméretű városi úthálózatok modellezése során. 2009. Magyar Mérnökakadémia: Innováció és Fenntartható Felszíni Közlekedés Konferencia IFFK 2009. 1. szekció <http://kitt.uni-obuda.hu/mmaws/>
- [7] T Péter, M. Basset Application of new traffic models for determine optimal trajectories, pp. 89-94. Sessions 1 Automation and Mechatronics. (1-C-1 Sistem Modelling and Control). Oct.21-Oct.23, INTERNATIONAL FORUM ON STRATEGIC TECHNOLOGIES (IFOST 2009) HoChiMinh City University of Technology, Vietnam.
- [8] Zs. Bede, G. Szabó, T. Peter Optimalization of Road Traffic With the Employment of Reversible Direction Lanes. PERIODICA POLYTECH TRANSPORT ENG.: (1) (2010)
- [9] Bede Zs., Peter T.: The Extraction of Unique Velocity Processes from a Macro Model, *Periodica Polytechnica* 38/2 pp. 105-111 DOI: 10.3311/pp.tr.2010-2.08 2010
- [10] Yibing Wang, Markos Papageorgiou, Albert Messmer, Pierluigi Coppola, Athina Tzimitzi, Agostino Nuzzolo An adaptive freeway traffic state estimator, *Automatica* 45 (2009) 10.24.
- [11] T. Peter, J. Bokor: Modeling road traffic networks for control, *Annual International Conference on Network Technologies & Communications* NTC 2010 29 – 30, *Phuket Beach Resort*, Thailand, pp. N 18-22. Paper Code: 21 (ISBN: 978-981-08-7654-8) November 2010
- [12] T. Peter, J. Bokor: New road traffic networks models for control, *GSTF International Journal on Computing*, vol. 1, Number 2. pp. 227 -232. DOI: 10.5176\_2010-2283\_1.2.65 February 2011
- [13] Peter T., Fülep T., Bede Zs.: The application of a new principled optimal control for the dynamic change of the road network graph structure and the analysis of risk factors, *EAEC Conference* (Valencia) 2011.
- [14] Zsuzsanna Bede, Tamás Péter The mathematical modeling of Reversible Lane System. *PERIODICA POLYTECHNICA-TRANSPORTATION ENGINEERING* 39:(1-2) pp. 7-14. Paper 2. (2011)
- [15] Zsuzsanna Bede, Tamás Péter The development of large traffic network model. *PERIODICA POLYTECHNICA-TRANSPORTATION ENGINEERING* 39:(1-2) pp. 1-6. Paper 1. (2011)
- [16] Péter Tamás Csomópontok optimális működtetése közúti közlekedési hálózatban, a matematikai modell tárgyalása. *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE* LX. évfolyam:(1.) pp. 27-33. Paper *Közúti közlekedés*. (2011)
- [17] Dr Péter Tamás Csomópontok optimális működtetése közúti közlekedési hálózatban, a számítási eredmények vizsgálata. *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE* LX. évfolyam:(2) pp. 4-14. Paper 1. (2011)
- [18] Dr Péter Tamás, Bede Zsuzsanna A változtatható irányú forgalmi sávokkal működő közúti közlekedési rendszer matematikai modellezése. *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE* LX:(3) pp. 46-56. Paper 46. (2010)
- [19] Bede Zsuzsanna, Dr Péter Tamás Nagyméretű közlekedési hálózati modell továbbfejlesztése. *VÁROSI KÖZLEKEDÉS* 2010:(4) pp. 236-239. (2010)
- [20] Péter Tamás Járműforgalmi rendszerek modellezése és irányítása, célok, kutatási területek és eredmények. *JÖVŐ JÁRMŪVE - JÁRMŪIPARI INNOVÁCIÓ* IV:(1-2) pp. 59-78. Paper 59. (2009)
- [21] Bede Zsuzsanna, Péter Tamás A változtatható irányú forgalmi sávok hazai alkalmazásának aktualitása, egy lehetőség a közúti forgalom optimalizálására. *KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI SZEMLE* 2009.márc.:(3-4) pp. 1-14. (2009)
- [22] Péter Tamás, Bécsi Tamás, Aradi Szilárd Városi közúthálózat objektumainak videó és GPS alapú felmérése. *A JÖVŐ JÁRMŪVE* III:(3-4) pp. 34-38. (2008)
- [23] Péter Tamás Tetszőleges méretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok modellezése speciális hálózati gráffal, amelyben a gráf csúcsai általánosított szakaszok, a gráf élei a csúcsok közötti kooperálót leíró dinamikus relációk. *A JÖVŐ JÁRMŪVE* III:(3-4) pp. 26-29. (2008)
- [24] Bécsi T, Péter T Development and Evaluation of a Fuzzy-based Microscopic Vehicle-following Modell. *PERIODICA POLYTECHNICA-TRANSPORTATION ENGINEERING* 36:(1-2) pp. 15-19. (2008)