Anholonom járművek fixpont transzformáció alapú optimális adaptív szabályozása ⋆

Tar József, Bitó János, Rudas Imre * Nádai László **

* *Budapesti Műszaki Főiskola, Neumann János Informatikai Kar, IMRI, H-1034 Budapest, Bécsi út 96/B (e-mail: tar.jozsef@nik.bmf.hu, bito@bmf.hu, rudas@bmf.hu)*
** *Budapesti Műszaki Főiskola, Közlekedésinformatikai és Telematikai Egyetemi Tudásközpont, H-1034 Budapest, Bécsi út 96/B (e-mail: nadai@bmf.hu)*

Abstract: A legtöbb kerekes jármű rotációs helyzete és pozíciója nem szabályozható egyszerre és tetszőlegesen. E problémát a gyakorlatban iteratív "előre-hátra" mozgással lehet megoldani pl. zsúfolt parkolóban adott helyre való beállás vagy arról való kiállás esetén, de ez a probléma megoldást kíván "sima" mozgáspálya követésekor is. Az adott szerkezettel kinematikailag megvalósítható előírt mozgás komplikált számításokat, pl. a Frenet koordináták használatát igényelné. Ennek kényelmes alternatívája lehet kinematikailag pontosan nem megvalósítható nominális mozgás előírása optimális szabályozóval kombinálva, amely megfelelő kompromisszum keresését teszi lehetővé egyszerre pontosan ki nem elégíthető feltételek teljesítésére. Pontryagin Lagrange szorzókon alapuló optimális szabályozója lehetővé teszi kompromisszumosan és szigorúan kielégítendő (ez utóbbiak a jármű kinematikai képességeinek precíz figyelembe vételét jelentik) feltételek kezelését. A jelen cikk oktatási célokat tartva szem előtt a kinematikai feladat megoldását az MS EXCEL SOLVER csomagjának és a Visual Basic programnyelvnek a használatával demonstrálja. A tekintett jármű (kerékpár) laterális és longitudinális modelljének pontatlanságait fixpont transzformáción alapuló adaptív szabályozás kompenzálja, melynek feladata a kinematikailag megtervezett mozgás realizálása.

1. BEVEZETÉS

Mivel a legtöbb közönséges kerekes jármű esetén a jármű pozíciója (pl. Descartes koordinátái) és forgási helyzete nem írható elő szimultán tetszőlegesen, két tipkus mozgási mód figyelhető meg: a) kis előre–hátra mozgással járó iteráció többnyire szűk parkoló helyre való beállás vagy onnan való kiállás esetében, és b) jelentős sebességű, pályakövető mozgás. Az adott jármű kinematikai adottságai mellett megvalósítható mozgáspályát a pontos kinematikai modellre támaszkodva lehet előírnni olyan lokális pályaadatok használatával mint a pálya helyi görbülete, lokális forgásközpontja, azaz általában a Frenet–koordináta rendszer adataival.

Az optimális szabályozási eljárások számos különböző, gyakorlatilag fontos területen alkalmazhatók (pl. Brison & Ho [1975]). Kinematikailag elfogadható pálya-előírás konstruálásához tipikusan jó matematikai eszköz lehet az optimális szabályozók használata, amelyek szigorúan betartandó kényszerek mellett ellentmondásos feltételek közti kompromisszumos megoldás megtalálását is lehetővé teszik. Ilyen pontosan nem kielégíthető feltétel rendszer az egyszerre előírt pozíció és rotációs helyzet kerékpár–típusú járművek esetében. A feladat megoldásában fennálló kényszereket viszont precízen be kell tartani, mivel azok garantálják az így tervezett pálya megvalósíthatóságát az adott eszközzel, míg a pozíciót és forgáshelyzetet elegendő jó közelítéssel követni. Ilyen módon bonyolult analitikus számítások küszöbölhetők ki egyszerűbb, "univerzális algoritmusok" használatával mint pl. a *redukált gradiens módszer* vagy a *Lagrange–szorzók* használata.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti, kinematikailag megtervezett mozgáspálya nem valósítható meg a rendszer dinamikájának ismerete nélkül. A lépésenként hiányosan végrehajtott terv hibái akkumulálódhatnak és rossz tervezésre vezethetnek. A dinamikai modell lehet közelítően és részlegesen ismert, s felhasználható a szabályozás kezdetén úgy, hogy hiányosságait az adaptív szabályozás tanulással a mozgás közben később "korrigálja", iletve a "jó modellt" folyamatosan karbantartja.

A járművek oldalirányú mozgásának szabályozására az utóbbi időben jelentős figyelem irányult (pl. Suarez & Vinagre [2007], Heredia et al. [1998]). A kormánymű és a jármű egyszerű dinamikai modellje több közlemény szerint vezetett jó eredményekre (pl. Heredia et al. [1998], Rodriguez-Castaño et al. [2003]). Jelen cikkünkben egy ilyen közelítő modellt alkalmaztunk. Pontryagin eredeti módszerével szemben, amelyben a jármű kinematikai korlátai matematikailag kényszerekként fogalmazhatók meg, megközelítésünkben explicit egyenletek formájában vannak felhasználva, így a feladat megoldására a közönséges *gradiens módszert* lehett felhasználni Lagrange-szorzók alkalmazása nélkül. A szimulációkban az *MS EXCEL*

⋆ Munkánkat az *NKTH* a *Nemzeti Kutatási és Innovációs Alap RET-10/2006*, valamint az *OTKA K063405* sz. programjai keretében támogatta.

Solver programcsomagját, valamint a *Visual Basic* programnyelvet használtuk, mivel az valamennyi magyar, felsőoktatásban tanuló hallgató számára nagyon olcsón és jogtisztán hozzáférhető, ezért annak oktatásban való használata nemcsak szakmai, hanem gazdaságossági szempontokból is erősen indokolt. Mivel általában a jármű terhelése sem ismert, a longitudinális irányú mozgás szabályozása is adaptív technikát igényelhet.

Felbátorodva a Budapesti Műszaki Főiskolán az utóbbi néhány évben kifejlesztett, geometriai megközelítésű adaptív szabályozás sikerein (pl. Tar et al. [2006, 2008]), a jelen szimulációkban egy újabb fixpont transzformáció családon alapuló adaptív szabályozást alkalmaztunk. A hátra lévő részekben először a kerékpár mint egyszerű paradigma kinematikai és dinamikai modelljét elemezzük, majd Pontryagin optimális szabályozójának matematikai alapjait foglaljuk össze. Ezt követi a fixpont transzformációkon alapuló adaptív szabályozás elvének ismertetése, végül szimulációs eredmények ismertetése és azok elemzése következik.

2. A KERÉKPÁR KINEMATIKAI ÉS DINAMIKAI MODELLJE

Mint egyszerű paradigma a kerékpár a gyakorlatban használt járművek sokaságát reprezentálja. Szabályozható változói a "hátsó kerék" v sebessége (m/s), valamint a kormányzó (első) kerék δ kormányszöge (rad). Megfelelően választott Frenet-féle koordinátarenszer mértékeiben a mozgás tetszőlegesen megadható adatokkal írható le: minden pillanatban úgy tekinthető, mint egy fiktív ideiglenes centrum körüli merev forgás úgy, hogy az első és a hátsó kerék általában különböző távolságra van ettől a forgásközponttól, így különböző sebességgel halad. Az első és a hátsó kerék közti távolságot a merev alváz fix értéken tarja. Ha Φ jelöli a kerékpár testének rotációs szögét egy Descartes-féle, a síknak gondolt talajhoz kötött (x, y) koordinátarendszerben, a jármű szerkezetéből adódó kinematikai kényszerek a következőképp fejezhetők ki (1):

$$\dot{x} = v\cos(\Phi), \dot{y} = v\sin(\Phi), \dot{\Phi} = v\frac{\tan(\delta)}{L}. \qquad (1)$$

Egy sima síkgörbe mint trajektória követésénél praktikusan sugallt elvárás lenne a következő "nominális" adatok előírása: $\dot{x}^N$, $\dot{y}^N$, valamint ezektől függetlenül a forgáshelyzet Φ szögére vonatkozó elvárás, t.i. hogy az minden pillanatban feleljen meg a mozgáspálya érintője szögének, azaz mozgás közben az alváz "ne álljon ferdén" a haladási irányhoz képest. Az (1) egyenlet azonban világossá teszi, hogy egy ilyen elvárást pontosan nem lehet megvalósítani, mivel ha korrekciós okokból, Φ pontos beállításához szeretnénk mondjuk $\dot{\Phi}$ pillanatnyi értékeit előírni, általában ellentmondásra jutunk: adott aktuális Φ forgáshelyzet és kormányszög δ esetén $\dot{x}$ előírása meghatározza v és így $\dot{y}$, valamint $\dot{\Phi}$ értékét is. Az is világos, hogy a három lehetséges sebesség előírása helyett az egyik adat pontos teljesítése és a többi feltétel teljesülésének ignorálása gyakorlatilag nem ésszerű, és nem vezethet elfogadható megoldáshoz. Ennél sokkal inkább célszerű lehet a három adat hibájából álló *költségfüggvény* minimalizálása, amelynek eredményeképp esetleg egyik feltétel sem teljesül pontosan, de mindegyikük hibája elfogadható lehet. Ennek részleteivel az optimális szabályozás ismertetésénél foglalkozunk.

A rendszer *dinamikai modelljét illetően* csak röviden utalhatunk az irodalomra (Rodriguez-Castaño et al. [2003], Heredia et al. [1998]) amely a longitudinális és transzverzális írányt dinamikailag közelítőleg szétcsatoltnak tekinti az alábbiak szerint:

$$\dot{\delta} = -\frac{\delta}{\tau} + \frac{K_a}{\tau}u, \dot{v} = \frac{M_{mod}}{M}\dot{v}^{Des} - \frac{\mu}{M}v \qquad (2)$$

ahol M a teljes rendszer tömege, M_{mod} ennek modell–értéke, μ a kormánykerék forgásának viszkózus súrlódási együtthatója, $\dot{v}^{Des}$ a jármű kívánt pillanatnyi gyorsulása. A kormánykerék dinamikájára nézve (2) feltételezi, hogy annak rotációs szöggyorsulása és tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható hatású a viszkozitás dominanciája miatt. (Egyszerű esettanulmánnyal megmutatható, hogy ezek csak a kezdeti feltételektől erősen függő tranzienseket befolyásolják, amelyek nagyon gyorsan lecsengenek). A modellben τ a kormánykerék dinamikájának időállandója, u a szabályozó jel, és K_a egy erősítési faktor, amelynek értékét számításainkban 1-nek tételeztük fel. A következő szakaszban az optimális szabályozás elvét foglaljuk össze.

3. AZ OPTIMÁLIS SZABÁLYOZÓ

Az *optimális szabályozók* lényege valamilyen nem–negatív, az egyes kielégítendő, egymással esetleg ellentmondásban lévő feltételek teljesülésének hibáját mérő, pozitív faktorokkal súlyozott összegből álló költségfüggvény minimalizálása. A *súlyozó tényezők* beállításával manipulálható az egyes feltételek köz kötendő *kompromisszum* mértéke midőn lehetetlen az összes hibatagot egyszerre zérussá tenni. Amennyiben a költségfüggvény összes változójának differenciálható függvénye, a minimalizáláshoz a klasszikus *gradiens módszer* is alkalmazható. Külön osztályt képeznek azok a problémák, amelyekben ezen optimum (akár minimum, akár maximum) *kényszerfeltételek mellett* találandó meg. Ilyen terület a teljes *Klasszikus Termodinamika*, amelyben zárt rendszer termikus egyensúlyának megtalálásához vagy a rendszer egészének entrópiája maximalizálandó a teljes belső energia fix értéke (mint fő kényszerfeltétel) és egyéb, a rendszerbe beépített termodinamikai "falakat" reprezentáló, kiegészítő kényszerfeltételek mellett, vagy a belső energia minimalizálandó fix entrópia és ugyanazon kiegészítő kényszerfeltételek mellett (pl. Callen [1985]). Amennyiben a rendszer nem zárt, hanem valamilyen *"termodinamikai tartállyal"* áll kapcsolatban, a belső energia helyett alkalmas termodinamikai potenciálok minimalizálandók megfelelő kényszerek ill. egyes változók konstans értékei mellett. Az optimum megkeresésére *Lagrange redukált gradiens módszere* használható, amelyben a Lagrange szorzók speciális fizikia értelmezést (pl. nyomás, hőmérséklet) nyernek. *Ez is példázza, hogy e módszer alkalmazás–orientált oktatása milyen fontosságú számos, egymástól fenomenológiailag nagyon távol eső műszaki területek megértése érdekében.* Az MS EXCEL matematikai csomagjai és függvényei általában kiválóan használhatók az oktatásban (pl. Őri & Kiss [2002]). *"Solver"* nevű programcsomagja a redukált gradiens módszer egy professzionális realizálása, így ennek segítségével mutatjuk be a pályatervezésre javasolt módszerünket jelen cikkünkben is.

A feladat általános matematikai formája az alábbi: megkeresendő az $f(x)$ függvény minimuma vagy maximuma a következő, *szabályos formára hozott kényszerfeltételek* mellett: $\{g^{(i)}(x) = 0|i = 1,...,K < N\}$, $x \in \Re^N$. E feladatot először Lagrange állította fel és oldotta meg klasszikus mechanikai problémák kapcsán (Lagrange [1788]), a következő geometriai megfontoások alapján. A kanonikus formájú kényszerfeltételek mindegyike egy $\Re^N$ N dimenziós térbe beágyazott $(N-1)$ dimenziós hiperfelületre szűkíti le a keresés tartományát. Amenynyiben a kényszerfelületek összességének egyáltaléán van közös pontja (azaz a feladat egyáltalán megoldható), a keresési tartomány egy $(N-K)$ dimenziójú hiperfelületre korlátozódik. Ha kezdetben sikerül legalább egy pontot találni ezen a felületen, f értékének leghatékonyabb növelése érdekében ∇f irányába kellene onnan tovább lépni, ezzel azonban leléphetünk a hiperfelületről. Ezt elkerülendő ∇f-ről "lekaparhatók" a tiltott irányok a következő módon: ∇f helyett a $\widetilde{\nabla f} := \nabla f + \sum_{s=1}^{K} \lambda_s \nabla g^{(s)}$ irányban, azaz az ún. *"redukált gradiens"* irányában léphetünk tovább egy "kis lépéssel", ahol a $\{\lambda_s\}$ Lagrange–szorzókat úgy határozzuk meg, hogy a redukált gradiens merőleges legyen az összes $\nabla g^{(s)}$ kényszer–gradiensre. Ekkor ugyanis első rendben egyetlen $(N-1)$ dimenziós felületről (így azok közös részéről) sem lépünk le. Ha a redukált radiens nem zérus, még marad mozgásterünk, ha már lenullázódott, lehetetlen a kényszerek megsértése nélkül tovább lépni, így megtaláltuk az egyik, általában a kiindulási x értéktől is függő *lokális optimumot.* Pontryagin *optimális szabályozója* ezen a szemléletes és igen szellemes módszeren alapul (pl. Brison & Ho [1975]).

Opimális szabályozókat eredetileg olyan dinamikai rendszerek szabályozására fejlesztettek ki, amelyek x állapotváltozója a következő elsőrendű differenciálegyenlet szerint változik az időben: $\dot{x} = f(x,u)$, ahol u a "beavatkozó" (szabályozó) jel. Ha rendelkezésre áll egy $J(x,\dot{x},u) \equiv \tilde{J}(x,u)$ költségfüggvény, akkor ennek egy egész $[0,T]$ tartományra vett integrálját kísérelhetjük meg minimalizálni. "Sima" $\tilde{J}$ költségfüggvény esetén az integált kis Δt időfelbontású szakaszok segítségével téglányösszegekkel közelíthejük a $[x_{s+1}-x_s]/\Delta t \approx f(x_s,u_s)$ kényszerfeltételek mellett. Mivel általában $\Delta t > 0$, a téglányösszegekből ez kiemelhető, ezért elegendő minimalizálni a téglányokhoz tartozó pontokban vett minták $\sum_{s=0}^{N} \tilde{J}(x_s,u_s)$ összegét ugyanazon kényszerfeltételek mellett. E véges elem közelítésben a variálható változóknak az $\{x_s|s = 1,...,N\}$, $\{u_s|s = 0,...,N-1\}$ kényszereket kell kielégíteniük (x_0 a kezdeti feltételnek felel meg).

E feladat a redukált gradiens módszerrel úgy oldható meg, hogy minden egyes kényszerfeltételhez hozzárendelünk egy Lagrange–szorzót, s megoldjuk az immár kényszerek nélkül felírt ún. *"társfeladatot"*, azaz minimalizáljuk a $\Psi(\{x\},\{u\},\{\lambda\}) = \sum_{s=0}^{N} \tilde{J}_s + \sum_{s=0}^{N-1} \lambda_s^T [\frac{x_{s+1}-x_s}{\Delta t} - f_s]$ függvényt annak összes független változója szerint a szokásos gradiens módszerrel. Valóban, Ψ–nek a λ_s változók szerinti parciális deriváltjai triviálisan maguknak a kényszerfeltételeknek a teljesülését garantálják a megtalált lokális optimum helyén. Az x_k vektorok komponensei szerinti deriváltak a redukált gradiens zérus voltát írják elő a lokális optimumban: $\frac{\partial(\tilde{J}_k - \lambda_k^T f_k)}{\partial x_k} + \frac{\lambda_{k-1}-\lambda_k}{\Delta t} = 0$. Végül az u_k komponensek szerinti parciális deriváltak további feltételeket írnak elő: $\frac{\partial(\tilde{J}_k - \lambda_k f_k)}{\partial u_k} = 0$. A véges elem közelítésről visszatérve a "folytonos" esetre, tipikus ún. *"kanonikus egyenletekre"* jutunk, amelyek szoros analógiában állnak a *Klasszikus Mechanika* kanonikus mozgásegyenleteivel a következő "Hamilton–függvénnyel": $H(x,\lambda,u) := \lambda^T f - \tilde{J}$:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{3}$$

Itt fontos megjegyezni, hogy (3) *nem teljesen ekvivalens az eredeti optimum–feldattal*, mivel: a) mind a maximumhoz, mind pedig a minimumhoz azonos kanonikus egyenletek tartoznak, b) csupán a (3) egyenletet tekintve olyan *felületes látszat* támadhat, mintha a λ változó kezdeti értéke tetszőleges lehetne, holott ha a kiindulási ponttól kezdve precízen végrehajtjuk az optimum–keresést, jól meghatározott kezdeti λ értékre jutunk. Emiatt e kanonikus egyenleteknek inkább szimbolikus mint praktikus jelentősége van. Van azonban egy, a gyakorlat szempontjából is fontos *általános érvényű folyományuk*: az $\{x,\lambda\}$ "mesterséges állapotteret" az időben önmagára kanonikusan képezik le, s e leképezés Jacobi mátrixa *szimplektikus.* A szimplektikus transzformációk sajátérték spektruma közismerten speciális tulajdonságokkal bír (pl. Arnold [1985]): ha χ sajátérték, akkor $\bar{\chi}$, $1/\chi$, and $1/\bar{\chi}$ is sajátértékek [a $\bar{}$ szimbólum a komplex konjugáltat jelöli]. Ebből következik, hogy a módszer numerikus implementálásánál általában várhatók konvergencia problémák. Ha van "zsugorító irány" $|\chi| < 1$ mellett, szükségképpen van "táguló irány" is $|\bar{\chi}| > 1$ mellett, ami a megoldás "felrobbanásához" vezethet. Az egyetlen stabil eset az $|\chi| = |\bar{\chi}| = 1$ eset, amely a véges pontosságú digitális technika miatt a gyakorlatban szintén vezethet "felrobbanásra". *E körülmény is hangsúlyozza, hogy mennyire fontos az ilyen feladatok kezelésénél az eredeti Lagrange–szorzós megközelítére hagyatkozni.*

Fontos megmutatni, hogyha a véges idő felbontást csupán egyetlen lépésre korlátozzuk, a feladat megoldásában a Lagrange–szorzók használata megkerülhető, és a jóval egyszerűbb gradiens módszer alkalmazására hagyatkozhatunk, méghozzá úgy, hogy a h függvény idő szerinti deriváltját a $\dot{h}(t_{k+1}) \approx [h(t_{k+1}) - h(t_k)]/\Delta t$ kifejezéssel közelítjük a másik plauzibilis feltevés, $\dot{h}(t_k) \approx [h(t_{k+1}) - h(t_k)]/\Delta t)$ helyett. Mivel ilyenkor nincs szükség a Lagrange szorzók használatára, az optimumot más módszerekkel is, pl. a "részecske–raj optimalizálással (Particle Swarm Optimization–PSO)" (pl. Kennedy & Eberhart [1995]) is kereshetjük. A következőkben a fixpont transzformációkon alapuló adaptív szabályozás lényegét foglaljuk össze rövi-den.

4. AZ ADAPTÍV SZABÁLYOZÁS ALAPÖTLETE: A GERJESZTÉS–VÁLASZ SÉMA FIXPONT TRANSZFORMÁCIÓKKAL KOMBINÁLVA

A legtöbb szabályozási feladat megfogalmazható a következőképp: a szabályozott rendszertől azt várjuk, hogy attól egy előírt, *"kívánt választ"*, r^d reakciót kapunk egy Q "gerjesztésre", amit valamilyen "inverz dinamikai modell" segítségével számolunk ki a $Q = \varphi(r^d)$ módon. Mivel általában a rendelkezésre álló modell se nem pontos, se nem teljes, az adott Q gerjesztésre r^d helyett a pontos rendszer–dinamika, ψ által meghatározott *“realizált választ”* kapjuk: $r^r \equiv \psi(\varphi(r^d)) \equiv f(r^d) \neq r^d$. Fontos megjegyezni, hogy a $\varphi()$ és $\psi()$ függvények tartalmazhatnak rejtett paramétereket is, amelyek a dinamikai modell sajátságaiból erednek, valamint ismeretlen külső perturbációk hatásait is tükrözhetik. Fenomenlógiai okokból a szabályozó megkísérelheti “deformálni” az r^d bemeneti értéket r^d_*-ra úgy, hogy a kívánt helyzet, $r^d \equiv \psi(r^d_*)$ álljon elő. Másik formális lehetőség a durva modell kimenetének módosítása $r^d \equiv \psi(\varphi^*(r^d))$ módon. A következőkben megmutatjuk, hogy *“egy bemenetű, egy kimenetű [Single Imput – Single Output (SISO)] rendszerek”* e célra egyszerű paraméteres fixpont–transzformációkat használhatunk. Helytakarékosság miatt csak a legújabb, jelenleg közlésre benyújtott transzformáció ismertetésére szorítkozunk (Tar et al. [2008]). Tekintsük a következő függvényt,

$$
\begin{gathered}
G(x|x^d) := (x+K)\times \\
\times \left[1+\tanh\left(A\left(f(x)-x^d\right)\right)\right]-K, \\
For\, f(x_\star)=x^d : G(x_\star|x^d)=x_\star, \\
G(-K,x^d)=-K, \\
G' = \frac{(x+K)\,Af'(x)}{\cosh^2\left(A\left[f(x)-x^d\right]\right)}+ \\
+\left[1+\tanh\left(A\left(f(x)-x^d\right)\right)\right], \\
G'(x_\star|x^d)=1+(x_\star+K)\,Af'(x_\star)
\end{gathered}
\tag{4}
$$

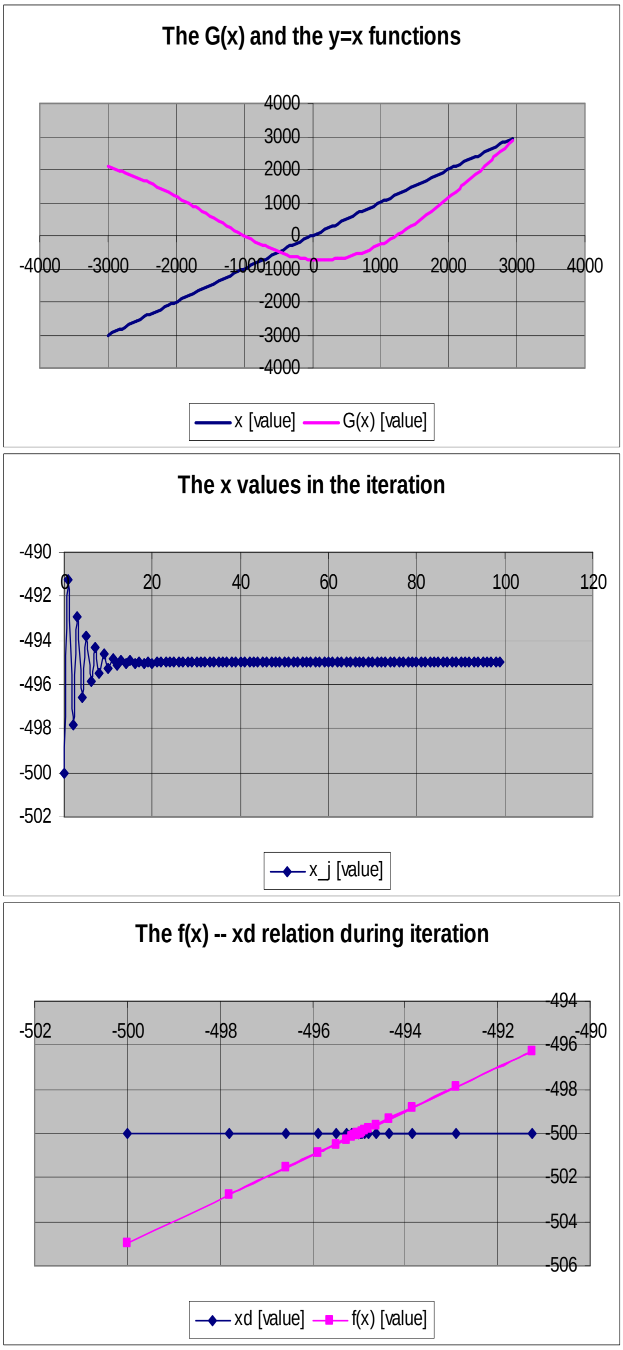
amelynek a megfelelő deformációt megvalósító $f(x_\star) = x^d$ $x_\star$ érték nyilvánvalóan fixpontja: $G(x_\star|x^d) = x_\star$! A másik, a szabályozási feladat megoldásának nem megfelelő, “hamis” fixpont (függetlenül az $f()$ függvény sajátságaitól) az $x = -K$ érték. Ha az $f(x)$ függvény nem viselkedik “extrém módon”, nagy $|x|$ értékekre G közelíti az affin (azaz egy konstans és egy lineáris részből álló) $x+K$ alakot, amihez a tanh() függvény telítődése szükséges. Ez a jó fixponttól távoli alak megintcsak független $f()$ sajátságaitól. Amennyiben pl. az $f()$ függvény $x_\star$ körül szintén affin alakkal közelíthető, a jó fixpont vonzóvá tehető annak egy véges környezetében. Pl. ha $x_\star+K < 0$, $f'(x_\star) > 0$, és $A > 0$, akkor $|G'(x;x^d)| < 1$ elérhető $x_\star$ véges környezetében. A $\{x_0, x_1 = G(x_0), ..., x_{n+1} = G(x_n), ...\}$ iterációval nyert sorozat Cauchy sorozattá, azaz konvergenssé tehető abban a környezetben, amelyben $|G'| < 1$. Ha pl. $x_n \to x_*$, akkor

$$
\begin{gathered}
|G(x_*)-x_*| \leq |G(x_*)-x_n| + |x_n - x_*| = \\
= |G(x_*)-G(x_{n-1})| + |x_n - x_*| \to 0
\end{gathered}
\tag{5}
$$

ha G *folytonos*. Ha G *kontraktív* is, azaz $\exists 0 \leq K < 1$ úgy, hogy két a és b elemre $|G(a) - G(b)| \leq K|a - b|$, akkor az iteráció nyilvánvalóan Cauchy sorozatot eredményez és konvergál az $\Re$ számhalmazon az $|\bullet|$ norma mellett. Erre mutat példát a 4.1. ábra. A továbbiakban ezt a módszert alkalmaztuk a kerékpár dinamikai szabályozására.

5. A KERÉKPÁR ADAPTÍV SZABÁLYOZÁSA

Tegyük fel, hogy adottak az aktuális x, y, Φ, v, és δ értékek mint *kezdeti feltételek* egy adott időpontban, és véges Δt idő–felbontás mellett keressük a következő lépésben szükséges értékeket! A kinematikai modell (1) szerint ezek a $x^{Next} = x + \Delta t \cdot \cos(\Phi^{Next})$, $y^{Next} = y + \Delta t \cdot \sin(\Phi^{Next})$, $\Phi^{Next} = \Phi + \Delta t \cdot v^{Next} \tan(\delta^{Next})/L$, v^{Next}, and δ^{Next} értékek lesznek. Ha a következő lépés nominális értékei, azaz x^N, y^N, Φ^N, is adottak, pozitív



4.1. ábra: a $G(x;x^d)$ függvény gráfja affin $f(x) = bx + c$ esetében a $b = 1$, $c = -5$, $A = 5 \times 10^{-4}/b$, $K = -3000$ és $x^d = -500$ értékek mellett (1. diagram), az x_n értékek sorozata (2. diagram), és az $f(x_n)$–x^d értékek alakulása (4. diagram)

A, B, és C együtthatókkal megkonstruálható a következő költséfüggvény

$$
\begin{gathered}
\tilde{J} := A\sqrt{(x^N - x^{Next})^2 + (y^N - y^{Next})^2}+ \\
+B|\Phi^N - \Phi^{Next}| + C(\delta^{Next})^8.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Az A együtthatóval szorzott tag a pályakövetési hibát “bünteti”, a B együtthatójú tag a rotációs szög hibáját, míg a C együtthatóval szorzot tag a túlságosan nagy kormányszög előfordulását igyekszik megakadályozni, miközben a kis kormányszögekre praktikusan nincs hatással. E költségfüggvény eleve deriválható, külön kényszerfeltételek nélkül veszi figyelembe a jármű kinematikai sajátságait, és kezelhető az egyszerű gradiens módszerrel. Az “ideális esetben”, midőn a rendszer dinamikáját pontosan ismerjük és figyelembe tudjuk azt venni, pontosan az így tervezett “következő pontot” tudjuk megkapni. Modell–pontatlanságok vagy külső zavarok esetén azonban ehelyett a “megvalósult” v_{Next}^{Act} értékeket kapjuk, amelyek (2) szerint kapcsolódnak a “kívánt” következő értékekhez:

$$\frac{M_{mod}}{M}\dot{v}^{Des} - \frac{\mu}{M} v_{Next}^{Act} = \frac{v_{Next}^{Act} - v}{\Delta t} \equiv \dot{v}^{Act} \tag{7}$$

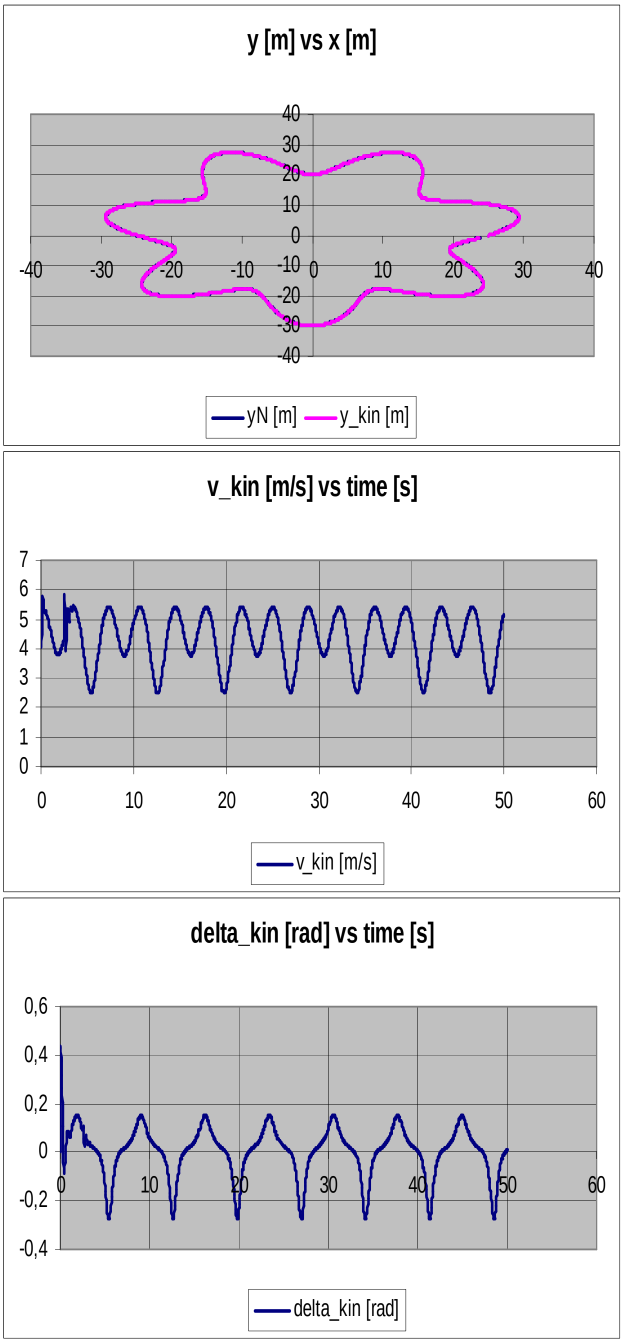
ahol $\dot{v}^{Des} = (v^{Next} - v)/\Delta t$ tartalmazza az optimalizálás eredményét. Hasonló módon a $\dot{\delta}^{Act} = \frac{K_a \cdot (\delta^{Des} - \delta) - \delta}{\tau}$ kapcsolatra jutunk, ha a kormányszöget a szimpla $u \equiv (\delta^{Des} - \delta)$ visszacsatolással akarjuk szabályozni. Mivel (7) könnyedén megoldható zárt alakban, igen könnyű e feladatra szimulációs programot kidolgozni.

Az MS EXCEL és a Visual Basic használata nagyon előnyös e célra. Segítségével bizonyos *funkcionális kapcsolatok* éppúgy kódolhatók a munkalapokban, mint a Solver beállításait tartalmazó “modellek”. A Visual Basic programnyelvet arra használhatjuk, hogy vele kitöltsük a munkalapok bizonyos celláit, a Solver hívásával elvégezzük az optimalizálást az egyszerű *SolverSolve UserFinish := True*, *SolverFinish KeepFinal:=1* parancsokkal, majd az eredményt kiolvasva a munkafüzet egyéb celláiba írjuk azt be grafikon kényelmes, egérrel való készítése céljából. Mielőtt belépnénk a szabályozási ciklusba, a Solver beállításait egyszer kell csak beolvasnunk mint pl. *SolverLoad LoadArea:=Range(”B27:B29”)*. Egymástól függetlenül szintén könnyen implementálható az adaptív szabályozás a v és a δ értékekre. A következőkben szimulációs eredményeket mutatunk be.

6. SZIMULÁCIÓS EREDMÉNYEK

A számításokban a következő súlyfaktorokat használtuk: $A = 500$, $B = 50$, and $C = 1$. A számítások időfelbontása $\Delta t = 0.05\ s$ volt. A kerékpár pontos modell adatai $L = 0,5\ m$, $\tau = 0,1\ s$, $M = 1,5\ kg$, $\mu = 10\ Ns/m$ longitudinális viszkozitás. A modellben a valódi tömeg helyett az $M_{Mod} = 1\ kg$ értéket használtuk. A fixpont transzformáció paraméterei a v sbesség esetén $A_{ctrl_v} = 10^{-5}$, $K_{ctrl_v} = -2000$, a δ kormányszögre $A_{ctrl_\delta} = 4 \times 10^{-3}$, $K_{ctrl_\delta} = -500$ voltak. A v változóra adaptív szabályozás néhány adatát mutatja a 6.1. ábra. A $t = 0$ körüli ingadozás a nem adaptív szabályozás tranziense. Az adaptivitás az 50. lépésben lett bekapcsolva, ennek tranziensei jól elkülönülnek a kezdetiektől. Az adaptív és nem adaptív szabályozások összehasonlítása érdekében érdemesebb a követési hibákat mutatni a megfelelő diagramokon. Mint az a 6.2. ábrán jól látszik, a v-re vonatkozó adaptivitás bekapcsolása egy nagyságrenddel csökkentette a pályakövetési hibát. Hasonló hatás olvasható le a 6.3. ábrán a rotációs állapot szögéről, amely, ahogy a jármű körbe–körbe jár az adott pályán, idővel nagy léptékben növekszik, de távolról sem egyenletesen (6.4. ábra).

A csak a δ változóra adaptív szabályozás ilyen mértékű javulást nem eredményezett, ami arra utal, hogy a viszgálatokban a tömeg becslési hibája és a longitudinális viszkozitás hatása dominált. A két módszer együttes

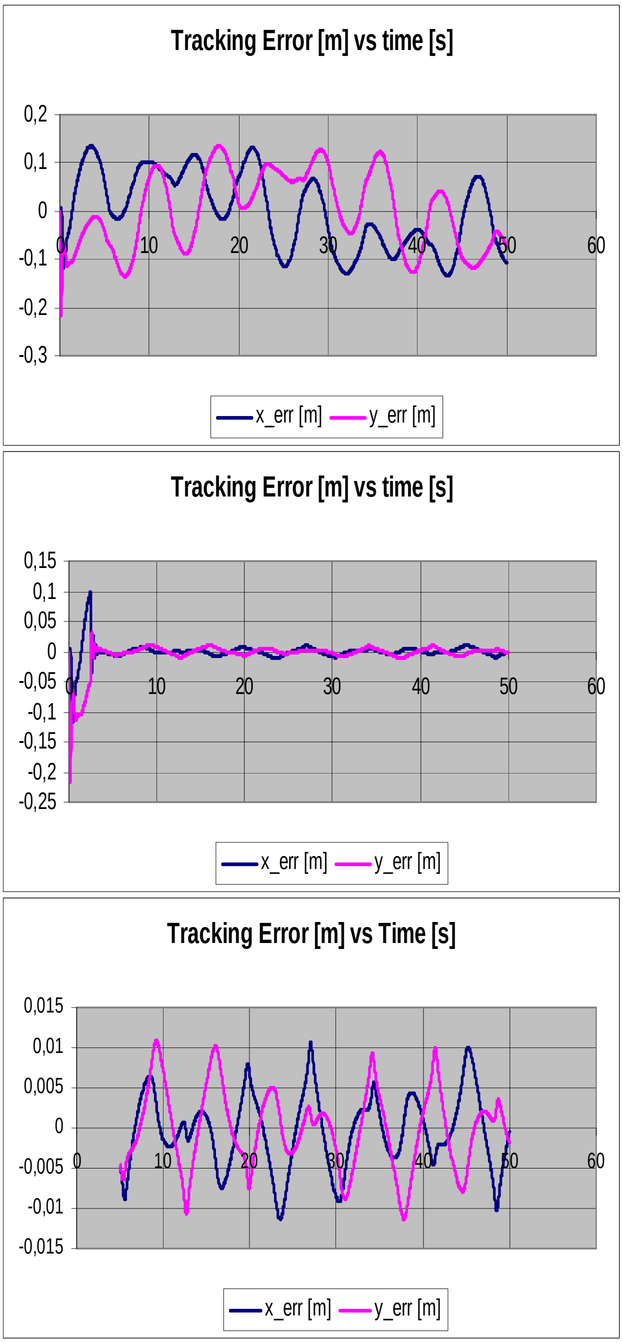


6.1. ábra: a nominális pályagörbe az (x, y) síkon (1. diagram), a szükséges sebesség az idő függvényében (2. diagram), és a szükséges kormányszög δ az idő függvényében (3. diagram) a v–re adaptív szabályozás esetén

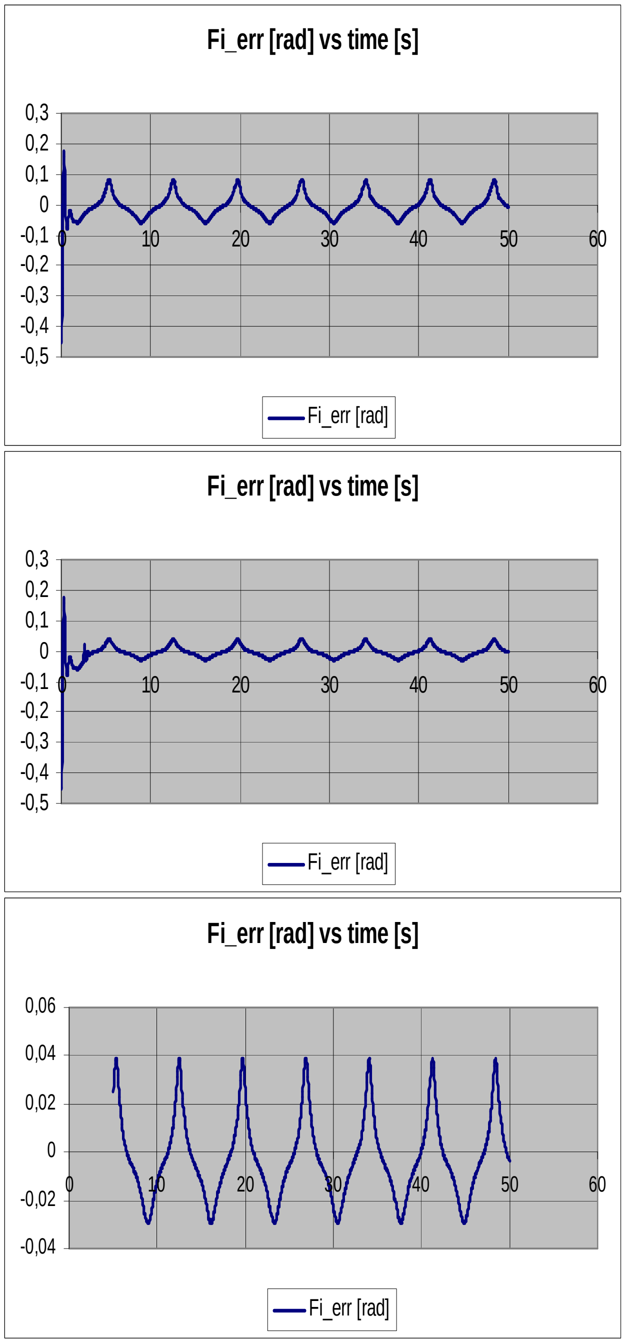
alkalmazása a fenti paraméter–beállítások esetén nem vezetett konvergenciára (6.5. ábra).

7. KÖVETKEZTETÉSEK

Jelen cikkünkben két küélönböző szabályozási módszer, az ún. *optimális szabályozás* és a Budapesti Műszaki Főiskolán kidolgozott, *fixpont transzformáció alapú adaptív szabályozás* lehetsége kombinálására mutattunk példát egy tipikus anholonom jármű, a kerékpár adaptív irányítása kapcsán, amelynek csak közelítő dinamikai modellje állt rendelkezésre. Míg az optimális szabályozás célja a kényelmesen



6.2. ábra: a pályakövetési hiba az (x, y) koordinátákban a nem adaptív esetben (1. diagram), a v-re adaptív esetben (2. diagram), és ennek nagyítása (3. diagram)



6.3. ábra: a Φ forgásszög követési hibája a nem adaptív esetben (1. diagram), a v-re adaptív esetben (2. diagram), és ennek nagyítása (3. diagram)

előírható pályakövetés precíz realizálhatatlanságából eredő ellentmondás feloldása volt, az adaptív szabályozó feladata a kinematikailag meghatározott, immár realizálható megoldás minél pontosabb megvalósítása. E célra egy nemrég bevezetett új, tangens hiperbolikus alakú fixpont transformációt alkalmaztunk.

A szimulációs eredmények jól illusztrálták a kétféle módszer egymással való ötvözhetőségét.

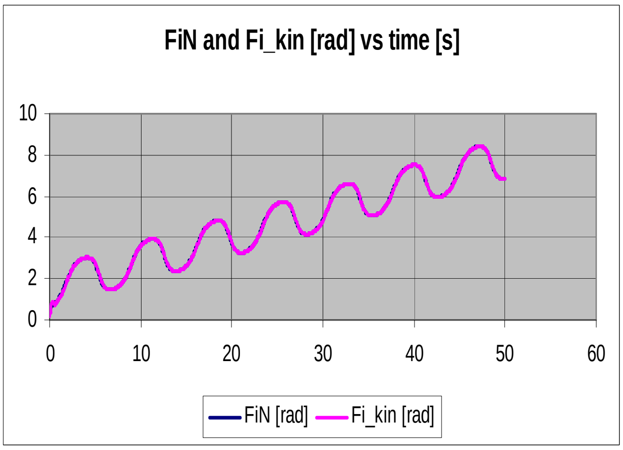
Az MS EXCEL Solver szolgáltatása és a Visual Basic segítségével realizált szimuláció jelentős mértékben szolgált oktatási célokat is.

Várható, hogy a jövőben az itt bemutatott függvénytől eltérő, ahhoz jellegében durván hasonló fixpont transzformációk is sikerrel alkalmazhatók majd.

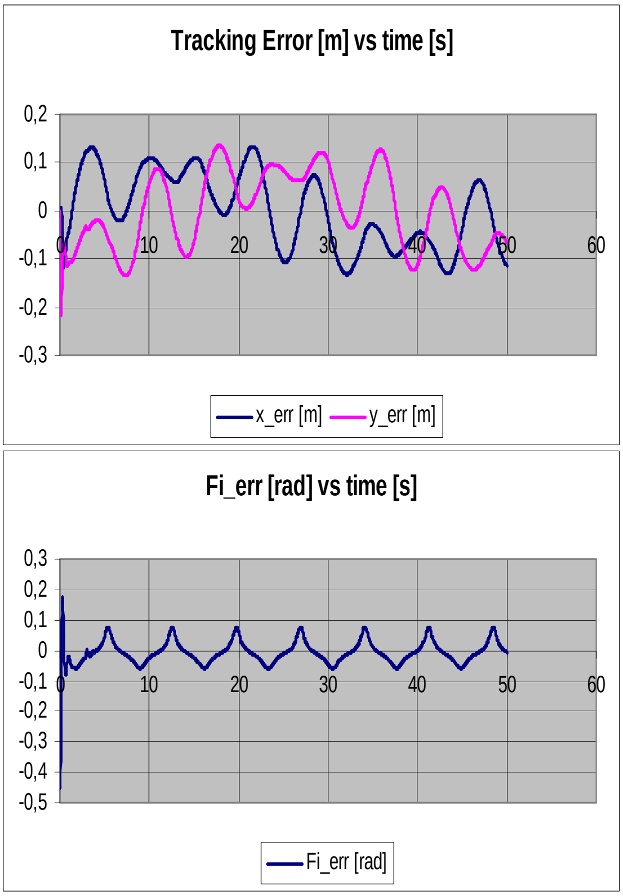
REFERENCES

E. Bryson Jr., Yu–Chi Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere, 1975.

J.I. Suárez, B.M. Vinagre. A Proposal for Parameter Tuning in Fractional MRAC. Application to the Lateral Control of an Autonomous Vehicle. *Preprints of the 6th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles (IAV2007)*, LAAS-CNRS, Toulouse, France, September 3–5, 2007.



6.4. ábra: a Φ forgásszög időbeli függése a v–re adaptív esetben



6.5. ábra: az (x, y) pozíció követési hibája a δ változóra adaptív esetben (1. diagram), valamint a Φ forgásszög követési hibája

G. Heredia, A. Ollero, F. Gordillo and J. Aracil. Stability Analysis of Fuzzy Path Tracking Using a MIMO Frequency Response Technique. In A. Ollero (ed.). *Preprints of the IFAC Workshop on "Intelligent Components for Vehicles"*, pp. 15–20, 1998.

A. Rodriguez-Castaño, A. Ollero, B.M. Vinagre and Y. Chen. Fractional Controller for Guidance of Autonomous Ground Vehicles. *Preprints of the* 5th *IFAC International Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications (SICICA 2003)*, pp. 97–100, July, 2003.

J.K. Tar, I.J. Rudas, Á. Szeghegyi and K.R. Kozłowski. Novel Adaptive Control of Partially Modeled Dynamic Systems. in: K. Kozłowski (ed.): *Lecture Notes in Control and Information Sciences – Robot Motion and Control: Recent Development, Part II - Control and Mechanical Systems*, Springer Berlin/Heidelberg, 2006.

J.K. Tar, I.J. Rudas. Fixed Point Transformations Based Iterative Control of a Polymerization Reaction. In J.A. Tenreiro Machado, Béla Pátkai and Imre J.J. Rudas (eds.): *Intelligent Engineering Systems and Computational Cybernetics*, Springer Science+Business Media B.V., 2006.

H.B. Callen. *Thermodynamics and Introuction to Thermostatistics (*2nd *edition)*. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1985.

I. Őri, G. Kiss. Teaching Probability Theory and Mathematical Statistics Using Microsoft Excel. In the Proc. of the 3rd *International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET02)* (CD issue), Budapest, Hungary, July 4-6, 2002.

J.L. Lagrange. *Mécanique Analytique (Analytical Mechanics)* 4th *ed., 2 vols.* Gauthier-Villars et fils, Paris, 1888-89 (First Edition: 1788.)

E. Bryson Jr., Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control.* Hemisphere, 1975.

V.I. Arnold. *A Mechanika matematikai módszerei (in Hungarian) (Mathematical Methods of Classical Mechanics).* Műszaki K¨önyvkiadó, Budapest, 1985.

J. Kennedy, R. Eberhart. Particle Swarm Optimization. In the *Proc. of IEEE Intl. Conf. on Neural Networks*, Perth, pp. 1942–1948, 1995.

J.K. Tar, J.F. Bitó, I.J. Rudas, K.R. Kozłowski and J.A. Tenreiro Machado. Possible Adaptive Control by Tangent Hyperbolic Fixed Point Transformations Used for Controlling the Φ^6-Type Van der Pol Oscillator. Submitted for publication at the 6th *IEEE International Conference on Computational Cybernetics (ICCC 2008)*, Stara Lesná, Slovakia, November 27-29, 2008.