Nagyméretű nemlineáris közúti közlekedési hálózatok speciális analízise

Dr. Péter Tamás*

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedéautomatikai Tanszék (tel.: +36-1-4631013; e-mail: peter.tamas@mail.bme.hu)*

Absztrakt: Az előadás anyaga nagyméretű közúti közlekedési rendszerek matematikai modellezésére speciális, hipergráf struktúrát mutat be, amely leírja egy tartomány esetén, a belső-belső, a külső-belső, a belső-külső és a külső-külső hálózati elemek közötti átadási törvényt. Megadja a rendszer működését leíró nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert. Bemutatja, hogy a rendszer pozitív rendszer. *Ljapunov függvények módszerével* kimutatja, hogy az autonóm rendszer aszimptotikusan stabilis. A nem autonóm rendszerre, a peremekre vonatkozó, *Ljapunov függvényt alkalmazó* irányítási törvényt ad meg, amely elégséges feltételt ad a rendszer aszimptotikus stabilitására és dinamikusan alkalmazható a teljes tartományon, ill. azokon a szubtartományokon, ahol kritikus helyzet lép fel.

1. BEVEZETŐ

Egy közúti közlekedési modell általában igen bonyolult:

- Számos geometriai jellemző szab feltételeket.
- Számos egyedi szabályozás működik.
- Igen nagy számú résztvevő kap szerepet.
- Igen nagy befolyása van a humán tényezőknek.
- Sokféle külső tényező, szezonális hatások, időjárás, stb. játszik közre.

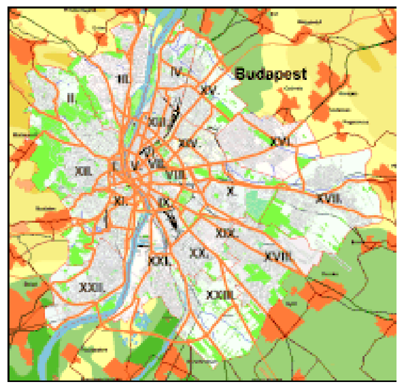
Mindezek ellenére a használható modellekkel szemben alapkövetelmény a hatékonyság:

- A modell vegyen figyelembe minden olyan elemet, amely a rendszer működése során tényleges hatást gyakorol és elhanyagolása eltorzítaná az eredményeket.
- Matematikailag legyen korrektül megalapozott.
- A szimuláció esetén numerikusan gyors legyen. Szabályozás esetén legalább valós idejű szabályozás valósuljon meg.

2. A HAGYOMÁNYOS, CSOMÓPONT KÖZPONTÚ TÉRKÉP MODELL ÉS A HÁLÓZATKÖZPONTÚ MODELL KÖZTI KÜLÖNBSÉG

Az irodalomból ismert közúti közlekedési hálózati modellek a csomópontokat, ill. kereszteződéseket kitüntetett elemként kezelik a modellekben. Ez olyan gráfot eredményez, amely hűségesen leutánozza a térképet, a gráf csúcsai a csomópontok, illetve kereszteződések, az ívek pedig az őket összekötő útszakaszok.

Ha ránézünk egy városi, vagy közúti térképre, a térkép egy olyan gráf, amelynek csúcsait a közlekedési csomópontok, éleit pedig a csomópontokat összekötő utak alkotják.

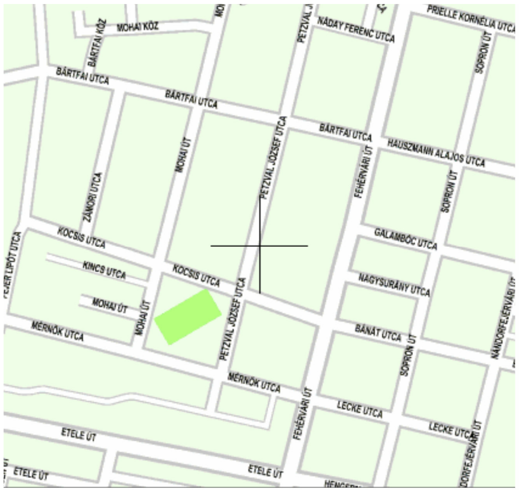


1.ábra: a gráf csúcsait a közlekedési csomópontok

Finomítva a térképet (*2,.3.ábra*):

2.ábra: finomított térkép-gráf

a teljesen részletes hálózatig, a csúcsok halmazában az összes kereszteződés is megjelenik, és az élek is kibővülnek az összes útszakasszal.



3.ábra: részletezett térkép-gráf

Tehát ez a leírás természetes módon adta azt a szemléletet, hogy a központi helyet a csomópontok (kereszteződések) foglalják el u.i., ők a gráf csúcsai és a forgalom lebonyolításánál a csúcsok kooperálnak egymással az őket összekötő útszakaszokon keresztül.

Ennek igen kiterjedt és modern kutatási irányai az intelligens csomópontok, egymással kooperáló csomópontok - ágensek, játékelméleti módszerek stb. területein jelentkeznek. Külön fontos kutatási terület a körforgalmú csomópontok vizsgálata is.

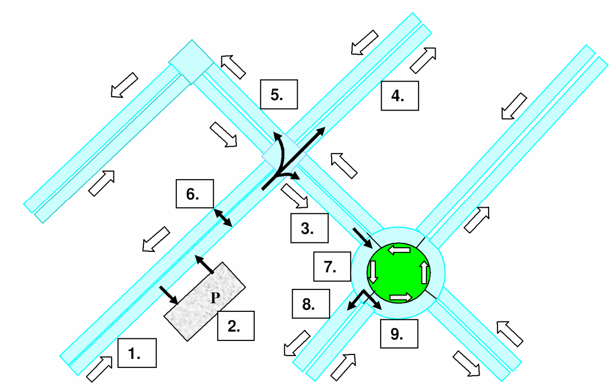
Tehát, valóban nagyon fontos a csomópontok optimális működése a rendszerben, azonban, ha alaposabban átgondoljuk a szerepüket, ők a „szükséges rosszak” a hálózatban. A közlekedés szempontjából, az elenne az ideális, ha minél kevesebb keresztező forgalom lenne! Sőt, ha ők nem is léteznének és minden pontból minden pontra keresztező forgalom nélkül lehetne el jutni!

Nyilván ez abszurd, de ez a gondolat elvezet bennünket egy más megközelítéshez. Felveti azt a kérdést, hogy valóban szükséges, hogy a csomópontok legyenek a vizsgálatok központi helyén? A jó válasz erre az, hogy a közlekedés szempontjából, a hálózat egészét kell a vizsgált központi helyére tenni.

3. A HÁLÓZATI MODELL ELEMEI, ÁLLAPOTJELLEMZŐK. AZ ÁLLAPOTJELLEMZŐKTŐL FÜGGŐ SZABÁLYOZOTT KOOPERÁCIÓK, HÁLÓZATI KAPCSOLATOK ÉS A MATEMATIKAI MODELL.

A modell elemei A hálózat alkotó elemei, első megközelítésben a sávszakaszok és a definiált parkolók és hozzájuk sorolhatók az utak melletti parkoló sávokat is. Könnyen belátható, hogy a definiált parkolók, valamint az utak melletti parkoló sávok a hálózat működésében, mint általánosított szakaszok vesznek részt, tehát az egész hálózatban ténylegesen szakaszok kooperálnak és ezek az elemek alkotják a hálózati gráf csúcsait.

Egyszerű példaként tekintsünk a 4. ábrán látható, néhány beszámozott elem rádolgozó ill. zavaró kooperációját:
1. elem kooperál a 2. 3. 4. 5. és 6.-al. 3. elem kooperál a 7.-el. 7. elem kooperál a 8. és 9.-el.



4.ábra: a hálózat alkotó elemei

Az irányított gráf élei dinamikus relációk, ugyan is a kapcsolatban álló, (kooperáló) csúcsok közötti kapcsolatok dinamikusak. Ezt a kapcsolatot írja le a kapcsolati mátrix. Ez figyelembe vesz minden, a térkép által tartalmazott elemet és mindazokat a szabályokat (ide értve a lámpákat is), amelyek megadják, hogyan történik a közlekedés? (A szabályok az elemeken történő közlekedés, továbbá az egyik elemről a másikra történő átlépés feltételeit írják elő. A térképünk fontos paramétereket is tartalmaz még, sávszakaszok hossza, szélessége, száma, parkolókban elhelyezhető járművek száma, megengedett sebességek számszerű értékei, ezeket már a dinamikus modell paramétereinél vesszük figyelembe.)
Ez a modell tehát, az egész hálózatot vizsgálja a teljes kapcsolatrendszer mellett. Ebben önálló elemként már nem jelenik meg a „csomópont”, ugyanis minden csomópont működése része a teljes kapcsolatrendszernek!

A közlekedési hálózat néhány specialitása:

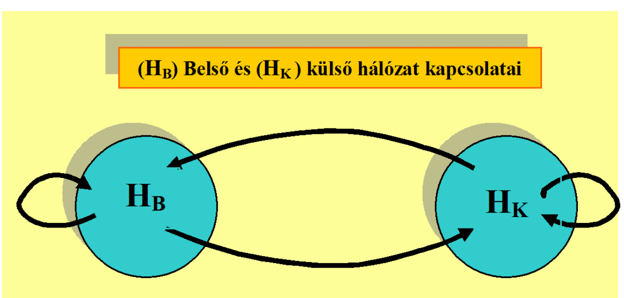
1. A párhuzamos sávok hatással vannak egymásra. Ez a kölcsönhatás, ami egymásra történő átdolgozás, egymás zavarása, befolyásolja a párhuzamos sávokon kialakuló járműsűrűséget és a járművek sebességét.
2. A szembejövő forgalom is hatással van a „jobb” és „baloldali” sávra. Ez a kölcsönhatás, megléte egymás előzések következtében fellépő zavarásában mutatkozik meg.
3. A definiált parkolók, valamint az utak melletti parkoló sávok a hálózat működésében, mint általánosított szakaszok vesznek részt, és az ott leparkolt járművek is kölcsönhatásban vannak azokkal a hálózati szakasokkal, ívekkel, amelyekkel közvetlen forgalmi kapcsolatban állnak. Ez, az időben változó intenzitású kapcsolat, képes pl. önmagában is csúcsterhelést létrehozni a vizsgált hálózaton anélkül, hogy erre a hálózatra egy definiált külső hálózatról forgalom beérkezne.

4. Jármű átadást érintő belső autonómizmusok is működnek a kapcsolatban álló hálózati elemek között. Pl. hiába zöld a lámpa, nem történik átadás, ha túl nagy a járműsűrűség felvevő szakaszon, vagy nulla az átadó szakaszon.

Állapotjellemző, kapcsolata a „hagyományos sűrűséggel”

- Modellünkben a (geometriai) járműsűrűség alatt azt az s dimenzió nélküli ($0 \leq s \leq 1$) mérőszámot értjük, amely az egy szakaszon tartózkodó járművek együttes hosszának és a szakasz hosszának arányát méri. A belső hálózat útszakaszain fellépő sűrűségek a rendszer állapotjellemzői.

Az n db. belső szakaszból álló közlekedési hálózati modellünk írja le azt a közúti/városi közlekedési rendszert, amely egy zárt görbével körülhatárolt tartományában helyezkedik el.
Ez esetben a (H_B) belső hálózaton kialakuló járműsűrűségek **a rendszer állapotjellemzői**, rendre $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$,…, $x_n(t)$. A modell, a (H_K) külső hálózat azon részhálózatát is használja, amely olyan m db. szakaszból áll, amelyeknek közvetlen kapcsolatuk van valamely belső szakasszal. Az ezeken kialakuló járműsűrűségeket jelöli $s_1(t)$, $s_2(t)$,…, $s_m(t)$, amelyeket **mérések alapján ismerünk**. A hálózatot leíró matematikai modellünk figyelembe veszi a hálózat tartományon belüli belső és a tartományon kívüli külső kapcsolatait is (*5. ábra*):



5. ábra: a belső és külső hálózat kapcsolatai

Hagyományosan, járműsűrűség, vagy forgalomsűrűség alatt az egységnyi útszakaszon, adott, t időben található járművek számát érti a szakirodalom (Megjegyzendő, hogy ez a mennyiség – amennyiben erre az áramlástani modellalkotás esetében szükség van - differenciális alakban is alkalmazható.) Jele: pl. S, mértékegysége lehet: [járműszám/km]

Az így most bevezetett s dimenzió nélküli (geometriai) sűrűség fogalom közvetlenül átszámítható a hagyományos S sűrűségre a méterben mért, h egységjármű hossz statisztikai fogalom felhasználásával:

$$s = S*h/1000, \quad \text{vagy } S = 1000*s/h$$

Ez által, természetesen erre az s (geometriai) sűrűségre is alkalmazható a sebesség-sűrűség kapcsolatát feltáró irodalom eredményei, lásd Greenshields (lineáris), Kladek, Greenberg (logaritmikus), Pipes and Munjal, Drew, Underwood, Drake, Zachor, Edie, Kövesné Gilicze Éva, -Debreczeni Gábor [9].

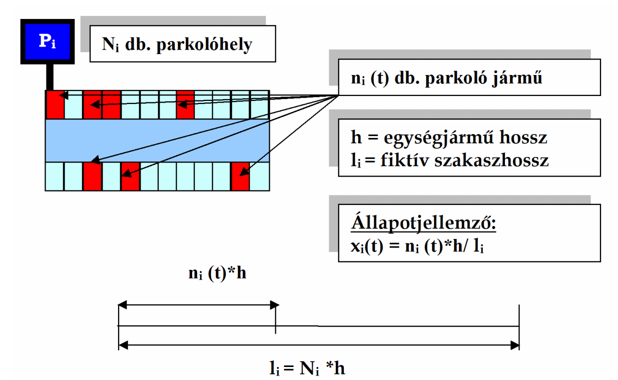
A parkolók a hálózat működésében, mint általánosított szakaszok vesznek részt.
Egy P_i parkolóban legyen a férőhely N_i és legyen t időpontban $n_i(t)$ db. Jármű a parkolóban. Ekkor tekintsük az $x_i(t)=n_i(t)/N_i$ állapotjellemzőt, amelyre egyrészt teljesül:

$$0 \leq x_i(t) \leq 1 \text{ feltétel,}$$

másrészt, h egységjármű hosszat feltételezve:

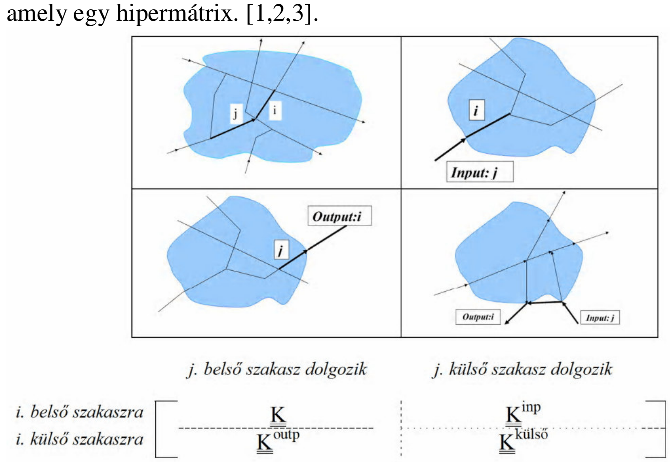
$$x_i(t)=n_i(t)*h/N_i*h,$$

tehát definiálható az $l_i = N_i*h$ fiktív szakasz, amelyen $n_i(t)*h$ hosszat foglalnak el a járművek (*6. ábra*):



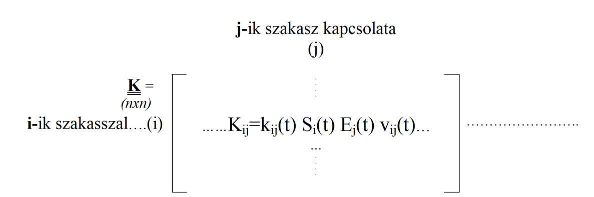
6. ábra: a parkolók általánosított szakaszok

Az állapotjellemzőktől függő szabályozott kooperációk, hálózati kapcsolatok és a matematikai modell. A hálózati matematikai modell megalkotásához tehát, alapvető fontossággal bírt a hálózatot definiáló kapcsolati mátrix, amely egy hipermátrix. [1,2,3].



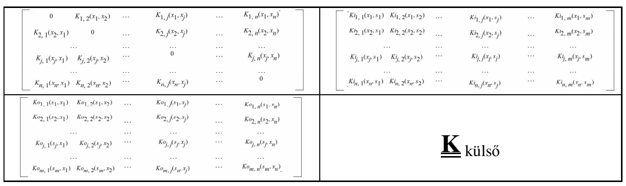
7. ábra: a belső és külső hálózat kapcsolatai hipermátrixa

A kapcsolati mátrixok felírása azt a kapcsolatot adja meg, amikor egy j szakasz kooperál az i szakasszal:



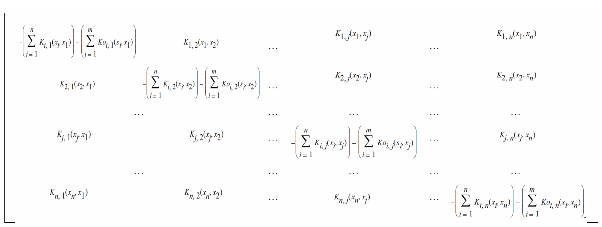
8. ábra: a kapcsolatai mátrix

A tárgyalt modell alkalmazható a nagyméretű közúti közlekedési hálózatok szimulációs vizsgálatára, tervezésére és a közlekedési rendszerek szabályozására. A 7. ábrán látható hipermátrix részletezve az alábbi:



9. ábra: a kapcsolatai hipermátrix részletezve

A $\underline{\mathbf{K}}_{belső}$ és a $\underline{\mathbf{K}}_{outp}$ mátrixból képzett $\underline{\mathbf{K}}$ konstruált mátrix szerepel a matematikai modellt alkotó differenciálegyenlet-rendszerben:



10. ábra: a $\underline{\mathbf{K}}$ konstruált mátrix

A matematikai model. A matematikai modell felírásakor a belső szakaszok $\underline{\mathbf{x}}(t)$ állapotjellemző vektorára az alábbi elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet-renszert kaptuk [1,2,3].

$$\underline{\mathbf{x}}(t)'_{(n\times 1)} = \mathbf{<\underline{1/l}_{\ i}>}_{(n\times n)}\ [\ \underline{\mathbf{K}}_{(n\times n)}\ \underline{\mathbf{x}}(t)_{\ (n\times 1)} + \underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{inp}\ (n\times m)}\ \underline{\mathbf{s}}(t)_{\ (m\times 1)}] \qquad (1)$$

Ahol: $\mathbf{<\underline{1/l}_{\ i}>}$ a belső szakaszhosszak reciprokait tartalmazó diadonális mátrix, a $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}(t),\mathbf{s}(t))$ és $\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{inp}}(\mathbf{x}(t),\mathbf{s}(t))$ kapcsolási mátrixok elemei a kapcsolási függvényeket és a sűrűségi állapotoktól függő függvényeket tartalmazzák, az elemek fizikai jelentése sebesség. A rendszer pozitív rendszer, a modell lényegét tekintve makroszkopikus modell.

4. STABILITÁS ÉS A LJAPUNOV STABILITÁSSAL MEGVALÓSÍTOTT IRÁNYÍTÁS

Tekintsük az (1) differenciálegyenlet-rendszert kissé tömörebb alakban:

$$\underline{\mathbf{x}}' = <\underline{\mathbf{L}}>^{-1}\ [\underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{s}})\ \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{K}}_{input}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{s}})\ \underline{\mathbf{s}}] \qquad (2)$$

Az állapotjellemzőkre igaz, hogy: $0 \le x_i \le 1$ (i=1,2,…n)

Vezessük be a $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l_1 * x_1 + l_2 * x_2 + \ldots + l_n * x_n$ függvényt, amelynél $0 < l_i$, az x_i állapotjellemzőhöz tartozó szakasz hosszát jelenti.
Röviden $\underline{\mathbf{L}} = [\, l_1, l_2, \ldots\ l_n]$ és $\underline{\mathbf{x}}$ skaláris szorzata:

$$V(x, x_2, \ldots, x_n) = \underline{\mathbf{L}} * \underline{\mathbf{x}} \qquad (3)$$

A $V(\mathbf{x})$ skalár-vektot függvény pozitív definit, mert:

$V(\mathbf{x})=0$, csak ha $\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$V(\mathbf{x})>0$, értelmezési tartományában minden nemzérus $\mathbf{x}$ állapotjellemzőre.

Képezzük a W függvényt:

$$W = d\,V(\mathbf{x})/dt = (\partial V/\partial x_1)(d\,x_1/dt) + \ldots + (\partial V/\partial x_n)(d\,x_n/dt) =$$

$$= l_1 * d\,x_1/dt + l_2 * d\,x_2/dt + \ \ldots + l_n * dx_n/dt = \underline{\mathbf{L}} * \underline{\mathbf{x}}'$$

Tehát W a (2) egyenletrendszer egyes egyenleteinek jobb oldalán szereplő tagok összege, amelyeknél az l_i szakaszhossz paraméterek kiesnek az $<\underline{\mathbf{L}}>^{-1}$diagonális mátrixal történt szorzás miatt.($<\underline{\mathbf{L}}>^{-1}$ diagonális mátrix a főátlójában a szakaszhosszak reciprokait tartalmazza.)

$\underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{s}})$ kapcsolati mátrix konstrukciójából adódóan, az összegzés után $\underline{\mathbf{K}}_{belső}$ mátrix minden eleme kiesik a W függvényt alkotó függvények közül (az x_i együtthatóknál csak $\underline{\mathbf{K}}_{outp}$ mátrixban szereplő elemek lépnek fel, az s_i együtthatóknál pedig csak $\underline{\mathbf{K}}_{input}$ mátrixban szereplő elemek lépnek fel).

$$W = -\left(\sum_{i=1}^{m} aq_{i,1}(s_i,x_i)\right)x_1 - \left(\sum_{i=1}^{m} aq_{i,2}(s_i,x_2)\right)x_2 - \left(\sum_{i=1}^{m} aq_{i,n}(s_i,x_n)\right)x_n + \left(\sum_{i=1}^{n} ai_{i,1}(s_1,x_i)\right)s_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} ai_{i,2}(s_2,x_i)\right)s_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} ai_{i,n}(s_m,x_i)\right)s_m$$

Tehát a rendszer stabilis, ha a peremeken a kiszállítás nagyobb, mint a peremeken történő beszállítás.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ai_{i,1}(s_1,x_1)\right)s_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} ai_{i,2}(s_2,x_2)\right)s_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} ai_{i,n}(s_m,x_i)\right)s_m < \left(\sum_{i=1}^{m} aq_{i,1}(s_i,x_1)\right)x_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} aq_{i,2}(s_i,x_2)\right)x_2 + \left(\sum_{i=1}^{m} aq_{i,n}(s_i,x_n)\right)x_n$$

Röviden:

$$\sum \mathbf{F_{input}} < \sum \mathbf{F_{output}} \qquad (4)$$

Az autonóm rendszer viszont mindig stabilis, ekkor ugyanis:

$$s_1 := 0 \quad s_2 := 0 \qquad s_m := 0$$

$$W = -\left(\sum_{i=1}^{m} ao_{i,1}(s_i,x_1)\right)x_1 - \left(\sum_{i=1}^{m} ao_{i,2}(s_i,x_2)\right)x_2 - \left(\sum_{i=1}^{m} ao_{i,n}(s_i,x_n)\right)x_n$$

mivel a szummákban szereplő sebességek nem negatívak.

A Ljapunov függvény fizikai jelentésére:
Vizsgáljuk meg a $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l_1 * x_1 + l_2 * x_2 + \ldots + l_n * x_n$ függvény fizikai jelentését.

A definíciónk szerint: $x_i = n_i * h / l_i$

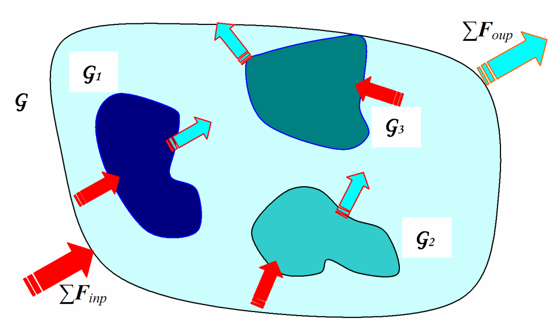
ahol: n_i az i-ik szakaszon tartózkodó járművek száma
h egységjármű hossz

n_i*h/ l_i helyettesítés után:

$$V = (n_1 + n_2 + \ldots + n_n)*h$$

a tartományban tartózkodó összes jármű számával arányos. Pontosabban: V az adott t időpontban a belső úthálózaton a járművek által elfoglat összes úthosszat adja meg.
Tehát, V(t) t-szerinti deriváltjának negatív értéke, az összes jármű szám csökkenését, illetve az elfoglat összes úthossz csökkenését jelenti a belső úthálózaton.

Ez a (4) vizsgálati eredmény, **a *Ljapunov függvényt alkalmazó* irányítási törvényt ad meg**, amely elégséges feltételt ad a rendszer aszimptotikus stabilitására és dinamikusan alkalmazható a teljes tartományon, ill. azokon a szubtartományokon, ahol kritikus helyzet lép fel.



11. ábra: Ljapunov függvényt alkalmazó irányítási törvény a tartományon, ill. szubtartományok

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A tárgyalt modell alkalmazható a nagyméretű közúti közlekedési hálózatok szimulációs vizsgálatára, tervezésére és a közlekedési rendszerek szabályozására.

Speciális makroszkópikus modellt alkalmaztunk, ezáltal elkerüljük, a parciális differenciál-egyenletrendszerekre vezető matematikai modellt.

- Speciális modellünkben nem kap kitüntetett szerepet a csomópont! Szakaszok vannak, amelyek kooperálnak, vagy nem. (Pl. Speciális szakasz a parkoló is és kooperálhat két párhuzamos sáv is).
- Modellünkben a járműsűrűség alatt az egy szakaszon tartózkodó járművek együttes hosszának és a szakasz hosszának arányát értünk.
- A közúti közlekedési modellünk egy zárt görbe által körülhatárolt, - nem feltétlen egyszeresen összefüggő - tartományban elhelyezkedő úthálózat szakaszakaszain, az áramlás következtében fellépő járműsűrűségeket vizsgálja.
- A tartományba beáramló és onnan kiáramló járműfolyamatokat ismeretnek tekintjük. Ezek a közlekedési folyamatok - első ránézésre - „inputjai” és „outputjai” a közlekedési rendszernek.
- Valójában ezek (a tartományon kívüli bevezető útszakaszokon mért járműsűrűségek, mint gerjesztések, a tartományon kívüli kivezető szakaszokon mért járműsűrűségek pedig, mint fojtások) együtt alkotják a matematikai modell tényleges input-folyamatai.
- A tartomány útszakaszain fellépő $x_i(t)$ sűrűségek a rendszer állapotjellemzői.
- n belső és m külső útszakaszból álló közlekedési hálózati modellt alkalmazunk.
- Ebben a tartományban a térkép alapján beszámozunk minden figyelembe veendő útszakaszt és parkolót.
- A matematikai modell megalkotásához alapvető fontossággal bír a hálózatot definiáló kapcsolati mátrixok megadása (*7. ábra).* A modellünk négy kapcsolati mátrixot alkalmaz.
- Végül, nemlineáris hálózati modellt vizsgálunk. *(1)*

IRODALOM

[1] Péter T. - Bokor J.: Járműforgalmi rendszerek modellezése és irányításának kutatása. A jövő járműve,Bp,06,1-2 pp19-23.
[2] Dr. Péter T. – Dr. Bokor J.: Nagy méretű közúti közlekedési hálózatok nemlineáris modelljének kapcsolati hipermátrixa, A jövő járműve,1-2. Budapest, 2007
[3] Péter T. Intelligens közlekedési rendszerek és járműkontroll. Előírások a közlekedés biztonságának növelésére. Bp.2005. pp.1-465. Magyar Mérnökakadémia Symposium.
[4] Dr. Péter T. – Stróbl A. – Fazekas S.: Hazai szoftverfejlesztés a nagyméretű közúti közlekedési hálózatok folyamatanalízisére, Budapest, 2007 Magyar Mérnökakadémia: Innováció és Fenntarható Felszíni Közlekedés
[5] Drew, D. R.:Traffic Flow Theory and Control, New York, McGarw-Hill Book Company, 1968
[6] Maklári J.: Közforgalmú csomópontok teljesítőképes-ségének vizsgálata. Városi közlekedés 2001/4
[7] Markos Papageorgiou: Concise Encyclopedia of Traffic and Transportation Systems. Pergamon Press, 1991.
[8] Kachroo P. - Özbay K.: "Feedback Control Theory for Dynamic Traffic Assignment", Springer, 1999.
[9] Kövesné dr. Gilicze Éva - Dr. Debreczeni Gábor Intelligens közúti közlekedési rendszerek és út-jármű rendszerek matematikai modellezése és analízise, (2004). /OM. Kutatási jelentés/